Κεφάλαιο 1ο

Νόμοι αερίων - Κινητική θεωρία

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο νόμοι αερίων - κινητική θεωρία πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Ποιο είναι το θερμοδυναμικό σύστημα που μελετάμε και ποιο είναι το περιβάλλον.
- ✓ Ποιο μέγεθος ονομάζουμε πίεση και ποια είναι η μονάδα μέτρησής της.
- ✓ Ποια κατάσταση είναι η μικροσκοπική και ποια η μακροσκοπική.
- ✓ Τι δεδομένα κρύβουν οι λέξεις "ακλόνητα ή ανένδοτα τοιχώματα", "αγώγιμα", "αδιαβατικά ή μονωτικά".
- ✓ Τι είναι το γραμμομόριο (mol), η γραμμομοριακή μάζα (M), ο αριθμός Avogadro (N_A).
- ✓ Τη σχέση κλίμακας Kelvin και κλίμακας Κελσίου.
- ✓ Τους νόμους των αερίων και τις χρήσιμες σχέσεις που προκύπτουν απ' αυτούς.
- ✓ Να σχεδιάζει τις μεταβολές των αερίων σε διαγράμματα P -V, P-T, V-T.
- ✓ Πώς πραγματοποιείται κάθε μεταβολή (ισόχωρη, ισοβαρής, ισόθερμη).
- ✓ Να γράφει την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων και να διακρίνει πότε χρησιμοποιούμε την σταθερά $R = 0,082 \frac{L \cdot atm}{mol \cdot K}$ και πότε $R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$.
- ✓ Ποιο αέριο θεωρούμε ιδανικό και τι ιδιότητες έχουν τα ιδανικά αέρια.

- ✓ Σε ασκήσεις με έμβολα που ισορροπούν να εφαρμόζει την εξίσωση $\Sigma F = 0$. Αν η μάζα του αερίου αλλάξει, να εφαρμόζει πάντα καταστατική εξίσωση.
- ✓ Ότι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων ενός αερίου, εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και όχι από το είδος του αερίου.
- ✓ Να διακρίνει τη μεταβολή του αερίου και να εφαρμόζει τον αντίστοιχο νόμο.
- ✓ Ότι οι γραμμομοριακές μάζες μετρούνται σε $\frac{kg}{mol}$.
- ✓ Συνθήκες s.t.p. είναι: $P = 1atm = 1,013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ και $T = 273K$.
- ✓ Όταν οι θερμοκρασίες πλησιάζουν το απόλυτο μηδέν δεν ισχύουν οι νόμοι των αερίων.
- ✓ Ισχύει η σχέση $\upsilon_{EN}{}^2 = \upsilon_{rms}^2 = \overline{\upsilon^2}$.
- ✓ Όγκος κυλίνδρου με εμβαδόν βάσης Α και ύψος ℓ: $V_K = A \cdot \ell$.
- ✓ Τη μορφή που παίρνει η καταστατική εξίσωση σε συνδυασμό με την πυκνότητα $p \cdot M = \rho \cdot R \cdot T$.

Νόμοι αερίων - Κινητική θεωρία: Τύποι - Βασικές έννοιες

- Φυσικά μεγέθη, μονάδες μετρήσεως και μετατροπές

P: Η πίεση ενός αερίου σε N/m^2 $(1atm = 1,013 \cdot 10^5 N/m^2)$

V: Ο όγκος του σε m^3 $(1cm^3 = 10^{-6} m^3, 1L = 10^{-3} m^3)$

T: Η θερμοκρασία του σε βαθμούς Κέλβιν $(T = \theta + 273)$

ρ: Η πυκνότητα του αερίου σε kg/m^3 $(1g/cm^3 = 10^3 kg/m^3)$

R: Παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων $R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot grad}$ στο S.I.

$\left(= 0,082 \frac{L \cdot atm}{mol \cdot grad} \right)$

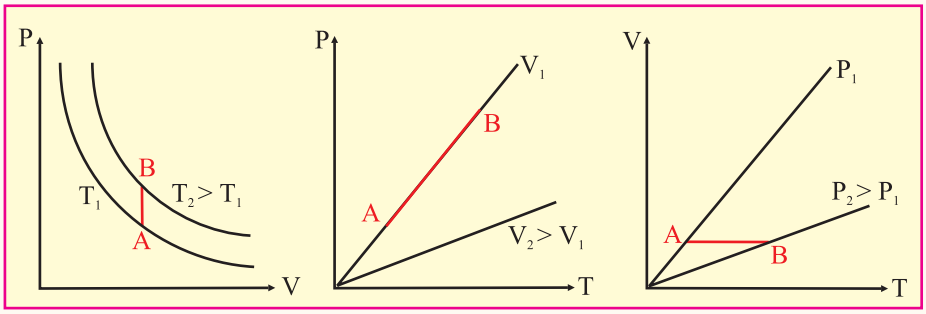
- Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

Καταστατική εξίσωση: $PV = nRT$, $PV = \frac{m}{M}RT$, $PM = \rho RT$ (n ο αριθμός των mol και M η γραμμομοριακή μάζα του αερίου)

- Ισόχωρη μεταβολή

AB: Ισόχωρη θέρμανση και BA: Ισόχωρη ψύξη

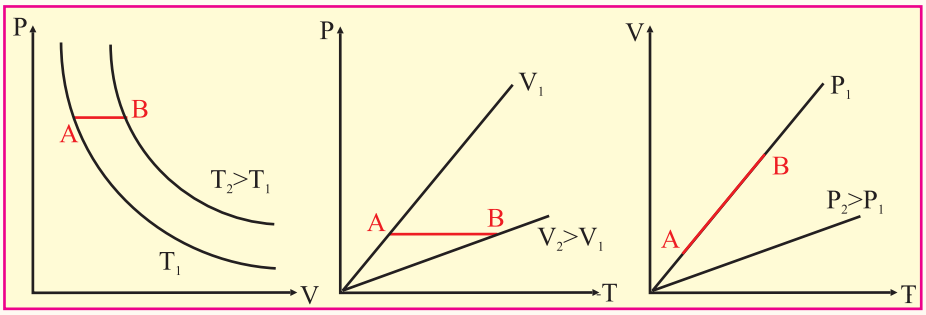
Στις ισόχωρες μεταβολές ισχύει $\mathbf{P_A / T_A = P_B / T_B}$ ($= nR/V$, νόμος Charles)



- Ισοβαρής μεταβολή

AB: Ισοβαρής θέρμανση (ή ισοβαρής εκτόνωση) και
BA: Ισοβαρής ψύξη (ή ισοβαρής συμπίεση).

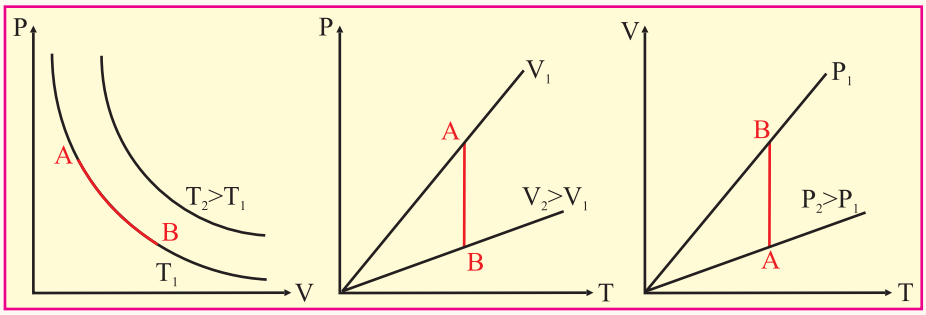
Στις ισοβαρείς μεταβολές ισχύει $\mathbf{V_A/T_A = V_B/T_B}$ ($= nR/P$, νόμος του Gay-Lussac)



- Ισόθερμη μεταβολή

  ΑΒ: Ισόθερμη εκτόνωση και ΒΑ: Ισόθερμη συμπίεση.

  Στις ισόθερμες μεταβολές ισχύει $\mathbf{P_A V_A = P_B V_B}$ (= nRT, νόμος Boyle)



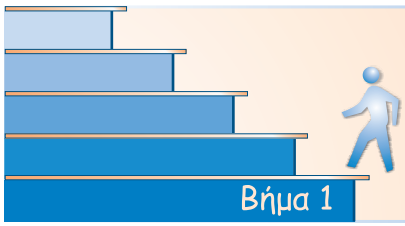
- Κινητική θεωρία των αερίων

  Θα χρειαστούμε τα εξής μεγέθη:

Σύμβολο	Επεξήγηση	Μονάδες
P	Η πίεση του αερίου	N/m^2
V	Ο όγκος του αερίου	m^3
T	Η θερμοκρασία του αερίου	K
ρ	Η πυκνότητα του αερίου	kg/m^3
N, N_A, n	Αριθμός μορίων, αριθμός Avogadro, αριθμός mol $(N = nN_A)$	
m_μ	Η μάζα ενός μορίου $(m_{ΟΛ} = Nm_\mu)$	kg
$\overline{\upsilon^2}$	Ο μέσος όρος των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων	m^2/s^2
υ_{EN} ή υ_{rms}	Η ενεργός ταχύτητα (Ορισμός: $\upsilon_{rms} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}}$)	m/s
$\overline{K}$	Η κατά μέσον όρο κινητική ενέργεια κάθε μορίου	Joule
k	Σταθερά του Boltzmann $(k = R/N_A)$	

Ένα αέριο πυκνότητας ρ βρίσκεται μέσα σε ένα δοχείο έχοντας πίεση P. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν:

$$P = \frac{1}{3}\rho\overline{\upsilon^2} \qquad \overline{K} = \frac{1}{2}m_\mu\overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2}kT \qquad \upsilon_{EN} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_\mu}}$$



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

ΘΕΩΡΙΑ 1

α. Μορφές καταστατικής εξίσωσης.

β. Σχέση απόλυτης θερμοκρασίας με μέση κινητική ενέργεια μορίων και πίεσης με υ^2_{EN}.

γ. Σχέση ενεργού ταχύτητας και γραμμομοριακής μάζας (M).

Απόδειξη

α. $P \cdot V = n \cdot R \cdot T \xrightarrow{n=\frac{m_{OΛ}}{M}} P \cdot V = \frac{m_{OΛ}}{M} R \cdot T$

$\xrightarrow{\rho=\frac{m_{OΛ}}{V}} P \cdot M = \rho \cdot R \cdot T$. Επίσης είναι $n = \frac{N}{N_A}$ επομένως προκύπτει

$$P \cdot V = N \cdot \frac{R}{N_A} T \Rightarrow P \cdot V = N \cdot k \cdot T \ .$$

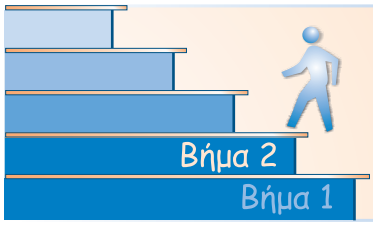
β. Είναι $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m_\mu \cdot \overline{\upsilon^2}}{V}$ (1) (m_μ : μάζα μορίου)

όμως $N \cdot m_\mu = m_{OΛ}$ άρα $P = \frac{1}{3} \cdot \rho \overline{\upsilon^2} = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \upsilon^2_{EN}$.

Επίσης $(1) \Rightarrow \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot 2\overline{K}}{V} \Rightarrow \overline{K} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n \cdot R}{N} T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{K} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} T \Rightarrow \overline{K} = \frac{3}{2} kT$$

γ. Είναι $\overline{K} = \frac{1}{2} \cdot m_\mu \cdot \upsilon^2_{EN} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \upsilon_{EN} = \sqrt{\frac{3kT}{m_\mu}} \Rightarrow \upsilon_{EN} = \sqrt{\frac{3RT}{N_A \cdot m_\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 26: Ερωτήσεις 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.10, 1.11, 1.13

σ. 31: Προβλήματα 1.30, 1.31, 1.32, 1.33, 1.34, 1.35

σ. 32: Πρόβλημα 1.36

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

σ.σ. 14 - 20: Τα παραδείγματα 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10

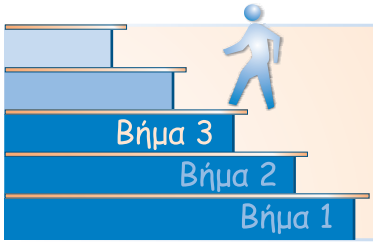
σ.σ. 29 - 31: Τα παραδείγματα 1.11, 1.12, 1.13, 1.15, 1.17

σ. 25: Ξεχωριστό θέμα 1

σ. 37: Ξεχωριστό θέμα 1

σ.σ. 23, 24: Ασκήσεις 1.3, 1.4, 1.9

σ.σ. 35 - 37: Ασκήσεις 1.11, 1.14, 1.17



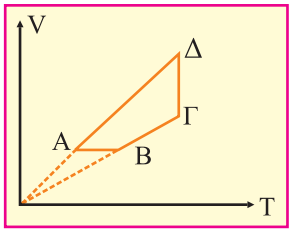
Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Δίνεται η κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ.**

α. Να βρείτε το είδος κάθε μεταβολής.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις κάθε μεταβολής.

γ. Να κάνετε τα διαγράμματα P – V και P – T.



Λύση:

α. ΑΒ: ισόχωρη θέρμανση
ΒΓ: ισοβαρής εκτόνωση (θέρμανση)
ΓΔ: ισόθερμη εκτόνωση
ΔΑ: ισοβαρής συμπίεση (ψύξη)

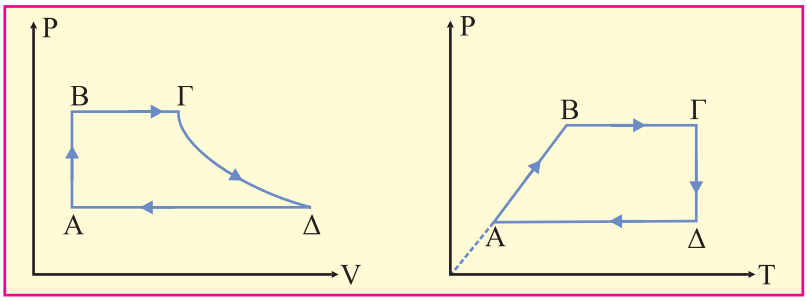
β. ΑΒ: $\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B}$

ΒΓ: $\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_\Gamma}{T_\Gamma}$

ΓΔ: $P_\Gamma \cdot V_\Gamma = P_\Delta \cdot V_\Delta$

ΔΑ: $\frac{V_\Delta}{T_\Delta} = \frac{V_A}{T_A}$

γ.



2. **Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο. Το δοχείο κλείνεται στο πάνω μέρος του με έμβολο που έχει βάρος 5N και εμβαδόν διατομής $1cm^2$ που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή. Το αέριο έχει αρχική θερμοκρασία $\theta_1 = 27^oC$ και το έμβολο ισορροπεί σε απόσταση $l_1 = 30cm$ από την βάση του κυλίνδρου. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $P_{ατμ} = 1atm$.**

α. Υπολογίστε την πίεση του αερίου.

β. Θερμαίνουμε αργά το αέριο μέχρι η θερμοκρασία του να γίνει $\theta_2 = 127^oC$. Πόση είναι η απόσταση l_2 της νέας θέσης ισορροπίας του εμβόλου από την βάση του δοχείου;

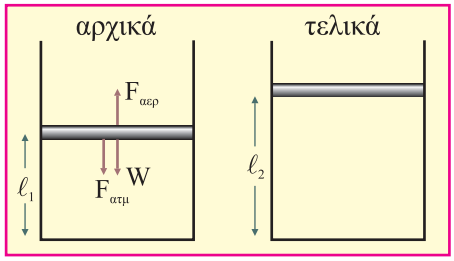
γ. Υπολογίστε την αρχική πίεση του αερίου.

i. Αν ο κύλινδρος είναι οριζόντιος.

ii. Αν ο κύλινδρος είναι κατακόρυφος με το έμβολο από κάτω.

Δίνεται: $1atm = 10^5 \frac{N}{m^2}$.

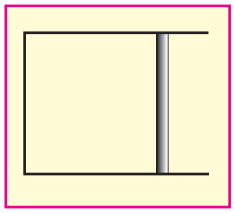
Λύση:



α. Στο έμβολο ασκούνται το βάρος, η $F_{ατμ}$ λόγω της ατμοσφαιρικής πίεσης και $F_{αερ}$ λόγω της πίεσης του αερίου.

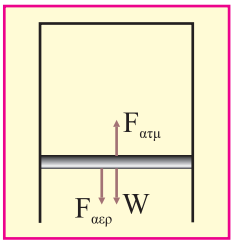
Είναι: $\Sigma F = 0 \Rightarrow W + F_{ατμ} = F_{αερ} \Rightarrow$

$$P = P_{ατμ} + \frac{W}{A} = 1,5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$



β. Η μεταβολή είναι ισοβαρής:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{A \cdot \ell_1}{T_1} = \frac{A \cdot \ell_2}{T_2} \Rightarrow \ell_2 = \ell_1 \frac{T_2}{T_1} = 40\,cm$$



γ.i. Αν είναι οριζόντιος: $P = P_{atm} = 10^5 \frac{N}{m^2}$

ii. Είναι $\Sigma F = 0 \Rightarrow P = P_{ατμ} - \frac{W}{A} = 0,5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$

3. **Ποσότητα 2g He βρίσκεται σε κατακόρυφο δοχείο που κλείνεται στο πάνω μέρος του με οριζόντιο έμβολο το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Η πίεση του αερίου είναι $P_1 = 0,82atm$ και ο όγκος $V_1 = 20L$.**

α. Να υπολογίσετε την απόλυτη θερμοκρασία T_1 του αερίου.

β. Εισάγουμε στο δοχείο ορισμένη ποσότητα He και παρατηρούμε ότι ο όγκος του αερίου διπλασιάστηκε, η πίεση παρέμεινε σταθερή, ενώ η απόλυτη θερμοκρασία έγινε $T_2 = \frac{5}{4}T_1$. Υπολογίστε την μάζα του He που εισάγαμε στο δοχείο.

γ. Στη συνέχεια το He που είναι μέσα στο δοχείο υποβάλλεται σε ισόχωρη μεταβολή μέχρι να αποκτήσει την αρχική του θερμοκρασία. Να υπολογίσετε την τελική πίεση του αερίου.

Δίνονται: $R\,R = 0,082\frac{L \cdot atm}{mol \cdot K}$, $M_{He} = 4\frac{g}{mol}$ **και** $1atm = 10^5 N/m^2$.

Λύση:

$$n = \frac{m}{M} = 0,5\,mol$$

α. $$P_1 \cdot V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 \cdot V_1}{nR} = \frac{0,82atm \cdot 20L}{0,082\frac{L \cdot atm}{mol \cdot K} \cdot 0,5mol} = 400K$$

β. $$\left.\begin{array}{l} P_1 \cdot V_1 = n_1RT_1 \\ P_2 \cdot V_2 = n_2RT_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot V_1}{P_2 \cdot 2V_1} = \frac{n_1RT_1}{n_2 \cdot R\frac{5}{4}T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4n_1}{5n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{8}{5}n_1 = 0,8\,mol$$

Άρα εισάγαμε 0,3mol He δηλ. 1,2g He

γ. Ισόχωρη: $$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_1} \Rightarrow \frac{0,82atm}{\frac{5}{4}T_1} = \frac{P_3}{T_1} \Rightarrow P_3 = \frac{4}{5}0,82atm \Rightarrow P_3 = 0,656\,atm$$

4. **Δύο οριζόντια κυλινδρικά δοχεία, περιέχουν το ίδιο ιδανικό αέριο και επικοινωνούν μεταξύ τους με ένα πολύ λεπτό σωλήνα, που κλείνει με στρόφιγγα. Στο δοχείο Α που έχει όγκο $V_A = 3 \cdot 10^{-3} m^3$ υπάρχουν $\frac{2}{R} mol$ αερίου υπό πίεση $P_A = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$. Στο δοχείο Β που έχει όγκο $V_B = 4 \cdot 10^{-3} m^3$ υπάρχουν $\frac{3}{R} mol$ αερίου υπό πίεση $P_B = 3 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$.**

α. Υπολογίστε τις αρχικές θερμοκρασίες σε κάθε δοχείο.

β. Ανοίγουμε την στρόφιγγα και μετά την αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας η τελική πίεση του αερίου είναι $P = 2,25 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$. Υπολογίστε την τελική θερμοκρασία του αερίου.

Δίνεται: $R = 8,314$ στο S.I.

Λύση:

α. Στο δοχείο Α: $P_A \cdot V_A = n_A R T_A \Rightarrow T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n_A R} = 300K$

Στο δοχείο Β: $P_B \cdot V_B = n_B R T_B \Rightarrow T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n_B R} = 400K$

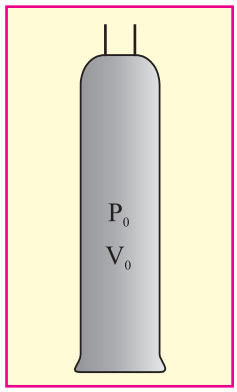
β. Όταν ανοίξουμε την στρόφιγγα έχουμε μετακίνηση μορίων από το ένα δοχείο στο άλλο, αλλά ο συνολικός τους αριθμός παραμένει σταθερός, δηλ.

$$n_A + n_B = n'_A + n'_B \Rightarrow n_A + n_B = \frac{P \cdot V_A}{R \cdot T} + \frac{P \cdot V_B}{R \cdot T} \Rightarrow T = \frac{P(V_A + V_B)}{R(n_A + n_B)} = 315K$$

5. **Στο δοχείο του σχήματος περιέχεται ποσότητα 4mol αερίου υπό πίεση P_0 και θερμοκρασία T_0. Το στόμιο του δοχείου φέρει βαλβίδα η οποία ανοίγει όταν η πίεση του αερίου γίνει ίση με $2P_0$. Θερμαίνουμε το αέριο σε θερμοκρασία $4T_0$ οπότε η βαλβίδα ανοίγει, διαφεύγει ποσότητα αερίου και στη συνέχεια η βαλβίδα κλείνει διατηρώντας το υπόλοιπο αέριο που έμεινε στη φιάλη στην θερμοκρασία $4T_0$.**

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των mol που παραμένουν στο δοχείο μετά τη θέρμανση στη θερμοκρασία $4T_0$.

β. Αν η ποσότητα του αερίου που διέφυγε από τη φιάλη κατά τη θέρμανση συλλεχθεί κατάλληλα πόσα δοχεία όγκου $V_1 = \frac{V_0}{10}$ μπορεί να γεμίσει σε συνθήκες $P = P_0$ και $T = T_0$;



Λύση:

α. Πριν ανοίξει η βαλβίδα εφαρμόζουμε καταστατική εξίσωση $P_0V_0 = 4RT_0$ (1) μετά το άνοιγμα της βαλβίδας και την διαφυγή x mol αερίου παραμένουν στη φιάλη $x' = (4 - x)\text{mol}$ σε συνθήκες $2P_0$, V_0, $4T_0$ και ισχύει:

$2P_0V_0 = (4 - x)R4T_0$ (2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2)

$$\frac{P_0V_0}{2P_0V_0} = \frac{4RT_0}{(4-x)R4T_0}$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{4}{4-x}\right)\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{4-x} = 2 \Rightarrow x = 2$$

Επομένως παραμένουν $x' = 4 - 2 = 2\,\text{mol}$ αερίου

β. Αφού κάθε δοχείο όγκου $\frac{V_0}{10}$ θα περιέχει τον ίδιο αριθμό mol n_1 θα ισχύει:

$y \cdot n_1 = 2\,\text{mol} \Rightarrow n_1 = \frac{2}{y}$ όπου (y) ο αριθμός των δοχείων όγκου $\frac{V_0}{10}$. Γράφουμε την καταστατική εξίσωση για κάθε δοχείο: $P_0\frac{V_0}{10} = n_1 \cdot RT_0$ (4)

Διαιρώ κατά μέλη τις (1) και (5)

$$\frac{P_0\frac{V_0}{10}}{P_0V_0} = \frac{n_1RT_0}{4RT_0} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{\frac{2}{y}RT_0}{4RT_0} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{4}{10} \Rightarrow y = 5\,\text{δοχεία}$$

6. **Διαθέτουμε ποσότητα αερίου N μορίων σε δοχείο όγκου $V = 10^{-5} m^3$. Η συνολική κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου στο δοχείο είναι $K_{ΟΛ} = 10J$ και η πυκνότητά του $\rho = 0,5 kg/m^3$.**

α. Να υπολογίσετε την ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου.

β. Το αέριο εκτονώνεται ισοβαρώς μέχρι την κατάσταση εκείνη στην οποία η ενεργός ταχύτητά του γίνεται $4 \cdot 10^3 m/s$ και στην συνέχεια ψύχεται ισόχωρα μέχρι να υποδιπλασιασθεί η πίεσή του. Να βρεθεί η τελική τιμή της θερμοκρασίας του αερίου καθώς και η τελική τιμή του όγκου του αερίου.

Δίνονται: $R = 8,3 J/mol \cdot K$ και η γραμμομοριακή μάζα του αερίου $4 g/mol$.

Λύση:

α. $$\left.\begin{array}{l} K_{ΟΛ} = N\bar{K} = N\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2} \\ \rho = \frac{m_{ΟΛ}}{V} = \frac{N \cdot m}{V} \end{array}\right\} \frac{K_{ΟΛ}}{\rho} = \frac{N\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2}}{\frac{N \cdot m}{V}} = \frac{\overline{\upsilon^2}V}{2}$$

$$\frac{2K_{ΟΛ}}{\rho V} = \overline{\upsilon^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2K_{ΟΛ}}{\rho V}} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \upsilon_{εν}$$

$$\upsilon_{εν} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,5 \cdot 10^{-5}}} m/s \Rightarrow \upsilon_{εν} = \sqrt{4 \cdot 10^6} m/s \Rightarrow \upsilon_{εν} = 2 \cdot 10^3 m/s \quad (1)$$

β. Κατά την ισοβαρή εκτόνωση διπλασιάζεται η ενεργός ταχύτητα: $\upsilon'_{εν} = 2\upsilon_{εν}$

$$\sqrt{\frac{3RT'}{M_r}} = 2\sqrt{\frac{3RT}{M_r}} \Rightarrow T' = 4T \quad (2)$$ όπου T η αρχική θερμοκρασία του αερίου.

Ακόμη βάσει νόμου Gay - Lussac $V' = 4V \quad (2α)$. Κατά την ισόχωρη ψύξη υποδιπλασιάζεται η πίεση άρα σύμφωνα με τον Νόμο του Charles υποδιπλασιάζεται και η απόλυτη θερμοκρασία. Ισχύει λοιπόν:

$$T'' = \frac{T'}{2} = \frac{4T}{2} = 2T \text{ και } V'' = V' = 4V$$

Επομένως ο τελικός όγκος του αερίου είναι τετραπλάσιος του αρχικού ενώ η τελική απόλυτη θερμοκρασία είναι διπλάσια της αρχικής.

Υπολογίζουμε την αρχική θερμοκρασία του αερίου:

$$\upsilon_{\varepsilon\nu} = 2\cdot 10^3 \, m/s = \sqrt{\frac{3RT}{M_r}} \Rightarrow \frac{3RT}{M_r} = 4\cdot 10^6 \ (S.I.)$$

$$T = \frac{4\cdot 10^6 \cdot M_r}{3\cdot 8,3} \Rightarrow T = \frac{4\cdot 10^6 \cdot 4\cdot 10^{-3}}{24,9} K$$

$$T = \frac{16\cdot 10^3}{24,9} K \Rightarrow T = 642,5K \text{ οπότε } T'' = 2T = 1285K$$

7. Σε δοχείο όγκου $V = 1L$ περιέχεται ορισμένη ποσότητα He υπό πίεση $P = 10^6 \frac{N}{m^2}$. Αν η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου είναι $\upsilon_{\varepsilon\nu} = 2\cdot 10^3 \frac{m}{s}$ να βρείτε:

α. την πυκνότητα του αερίου
β. τον αριθμό των mol του αερίου μέσα στο δοχείο
γ. την συνολική κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης του αερίου
δ. θερμαίνουμε το αέριο και παρατηρούμε ότι η ενεργός ταχύτητα των μορίων διπλασιάζεται. Να βρείτε τον λόγο της τελικής προς την αρχική θερμοκρασία του αερίου.

Δίνεται ότι $M_{He} = 4\cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}$ και το He συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο.

Λύση:

α. $$P = \frac{1}{3}\rho\cdot\overline{\upsilon^2} \Leftrightarrow P = \frac{1}{3}\rho\cdot\upsilon_{\varepsilon\nu}^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{3P}{\upsilon_{\varepsilon\nu}^2} \Rightarrow \rho = \frac{3\cdot 10^6}{\left(2\cdot 10^3\right)^2} kg/m^3$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3\cdot 10^6}{4\cdot 10^6} kg/m^3 \Rightarrow \rho = 0,75 \frac{kg}{m^3}$$

β. $$\rho = \frac{m_{O\Lambda}}{V} \Leftrightarrow m_{O\Lambda} = \rho\cdot V \Rightarrow m_{O\Lambda} = 0,75\cdot 1\cdot 10^{-3} kg \Rightarrow m_{O\Lambda} = 75\cdot 10^{-5} kg$$

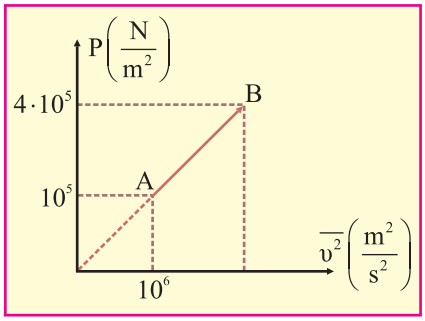
$$n = \frac{m_{ΟΛ}}{M_r} \Rightarrow n = \frac{75 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow n = 18,75 \cdot 10^{-2}\ mol$$

γ. $$K_{ολ} = N \cdot \overline{K} = N \cdot \frac{3}{2} k \cdot T = N \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} P \cdot V =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} J = \frac{3}{2} \cdot 10^3 J = 1500 J$$

δ. $$\left.\begin{array}{l} \upsilon'_{εν} = \sqrt{\dfrac{3RT'}{M_r}} \\ \upsilon_{εν} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_r}} \end{array}\right\} (:) \frac{\upsilon'_{εν}}{\upsilon_{εν}} = \frac{\sqrt{\dfrac{3RT'}{M_r}}}{\sqrt{\dfrac{3RT}{M_r}}} \Rightarrow \frac{2\upsilon_{εν}}{\upsilon_{εν}} = \sqrt{\frac{3RT' \cdot M_r}{3RT \cdot M_r}} \Rightarrow \frac{2}{1} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{4}{1}$$

8. **Ποσότητα $n = \frac{3}{R} mol$ ιδανικού αερίου (όπου R η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων) υποβάλλεται στη μεταβολή που φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.**



α. Να χαρακτηρίσετε το είδος της μεταβολής στην οποία υπόκειται το αέριο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να υπολογίσετε την ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου στην κατάσταση B

γ. Να υπολογίσετε τον όγκο του αερίου στην κατάσταση A.

δ. Να υπολογίσετε τον λόγο της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του αερίου στην κατάσταση B προς την μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου στην κατάσταση A.

Δίνονται: $R = \frac{25}{3} \cdot \frac{J}{mol \cdot K}$ και η γραμμομοριακή μάζα του αερίου $M = 2 \frac{g}{mol}$.

Λύση:

α. Στο διάγραμμα έχουμε την μεταβολή της πίεσης ιδανικού αερίου σε συνάρτηση με την μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων του.

Γνωρίζουμε ότι $P=\frac{1}{3}\rho\cdot\overline{\upsilon^2}\Leftrightarrow P=\frac{1}{3}\cdot\frac{m_{ΟΛ}}{V}\cdot\overline{\upsilon^2}$. Επειδή η γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση που την παριστάνει είναι της μορφής $y=\alpha\cdot x$ με $\alpha=$σταθ. Στην περίπτωσή μας $\alpha=\frac{1}{3}\cdot\frac{m_{ΟΛ}}{V}$ άρα $\frac{1}{3}\cdot\frac{m_{ΟΛ}}{V}=$σταθ. και επειδή $m_{ΟΛ}=$σταθ. συμπεραίνουμε ότι και $V=$σταθ. Επομένως η μεταβολή είναι ισόχωρη. Επειδή παρατηρούμε ότι η $\overline{\upsilon^2}$ αυξάνεται, συμπεραίνουμε ότι η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται άρα τελικά πρόκειται για ισόχωρη θέρμανση.

β. Επειδή η κλίση είναι σταθερή θα ισχύει:

$$\frac{P_A}{\overline{\upsilon_A^2}}=\frac{P_B}{\overline{\upsilon_B^2}}\Rightarrow\frac{10^5}{10^6}=\frac{4\cdot10^5}{\overline{\upsilon_B^2}}\Rightarrow\overline{\upsilon_B^2}=4\cdot10^6\,m^2/s^2\Rightarrow\sqrt{\overline{\upsilon_B^2}}=\sqrt{4\cdot10^6}\,m/s\Rightarrow$$

$$\upsilon_{εν(B)}=2\cdot10^3\,\frac{m}{s}$$

γ. $P_A=\frac{1}{3}\rho_A\cdot\overline{\upsilon_A^2}\Rightarrow\rho_A=\frac{3P_A}{\overline{\upsilon_A^2}}\Rightarrow\rho_A=\frac{3\cdot10^5}{10^6}\,kg/m^3\Rightarrow\rho_A=0,3\,\frac{kg}{m^3}$

$$n=\frac{m_{ΟΛ}}{M}\Rightarrow m_{ΟΛ}=n\cdot M\Rightarrow m_{ΟΛ}=\frac{3}{R}\cdot2\cdot10^{-3}\,kg\Rightarrow m_{ΟΛ}=\frac{3}{\frac{25}{3}}\cdot2\cdot10^{-3}\,kg\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{ΟΛ}=\frac{18}{25}\cdot10^{-3}\,kg\Rightarrow m_{ΟΛ}=0,72\cdot10^{-3}\,kg$$

$$\rho_A=\frac{m_{ΟΛ}}{V_A}\Rightarrow V_A=\frac{m_{ΟΛ}}{\rho_A}\Rightarrow V_A=\frac{0,72\cdot10^{-3}}{0,3}\,m^3\Rightarrow V_A=2,4\cdot10^{-3}\,m^3$$

ή $V_A=2,4\,L$

Προφανώς επειδή η μεταβολή ΑΒ είναι ισόχωρη ισχύει $V_B=V_A=2,4\,L$

δ. $\left.\begin{array}{l}\overline{K}_B = \frac{1}{2}m\cdot\overline{\upsilon_B^2}\\ \overline{K}_A = \frac{1}{2}m\cdot\overline{\upsilon_A^2}\end{array}\right\}(:)\frac{\overline{K}_B}{\overline{K}_A} = \frac{\frac{1}{2}m\cdot\overline{\upsilon_B^2}}{\frac{1}{2}m\cdot\overline{\upsilon_A^2}} = \frac{\overline{\upsilon_B^2}}{\overline{\upsilon_A^2}} = \frac{4\cdot10^6}{10^6} = 4$

9. Ορισμένη ποσότητα αερίου βρίσκεται σε μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α με $P_A = 8atm$, $V_A = 3L$ και $T_A = 300K$. Το αέριο υφίσταται τις παρακάτω διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές:

α. μεταβολή ΑΒ κατά την διάρκεια της οποίας η δύναμη που ασκεί το αέριο στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει ανά μονάδα επιφανείας παραμένει σταθερή και στο τέλος αυτής η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου έχει διπλασιασθεί

β. μεταβολή ΒΓ κατά την διάρκεια της οποίας η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου παραμένει σταθερή και η πυκνότητα του αερίου στο τέλος αυτής υποδιπλασιάζεται

γ. μεταβολή ΓΔ κατά την διάρκεια της οποίας η πυκνότητα του αερίου παραμένει σταθερή και στο τέλος αυτής η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου υποδιπλασιάζεται.

i. Να χαρακτηρίσετε το είδος των μεταβολών και να βρείτε τα P, V, T στις καταστάσεις Β, Γ και Δ.

ii. Να σχεδιάσετε τις μεταβολές αυτές σε άξονες $P-V$, $P-T$ και $V-T$ βαθμολογημένους.

Λύση:

i. ΑΒ: Επειδή η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι η πίεση, η πίεση παραμένει σταθερή και επειδή $\overline{K} = \frac{3}{2}kT$ για να αυξηθεί η $\overline{K}$ πρέπει ν' αυξηθεί η Τ, η μεταβολή ΑΒ είναι ισοβαρής θέρμανση (εκτόνωση)

ΒΓ: Επειδή $\overline{K} = \frac{3}{2}kT$ για να παραμένει η $\overline{K}$ σταθερή πρέπει $T = \text{σταθ}$ και επειδή $\rho = \frac{m_{ΟΛ}}{V}$ και $m_{ΟΛ} = \text{σταθ}$ για να υποδιπλασιαστεί η Ρ πρέπει να διπλασιασθεί ο όγκος, η μεταβολή ΒΓ είναι ισόθερμη εκτόνωση.

ΓΔ: Επειδή $\rho = \frac{m_{ΟΛ}}{V}$ και $m_{ΟΛ} = \text{σταθ}$ για να παραμένει η ρ σταθερή πρέπει

$V = \text{σταθ}$ και επειδή $\upsilon_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\frac{3RT}{M_r}}$ για να υποδιπλασιασθεί η $\upsilon_{\varepsilon\nu}$ πρέπει η T να ελαττωθεί, η μεταβολή ΓΔ είναι ισόχωρη ψύξη

A: $P_A = 8atm$, $V_A = 3L$, $T_A = 300K$

AB: ισοβαρής εκτόνωση: $P_B = P_A = 8atm$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{K}_B = \frac{3}{2}k \cdot T_B \\ \overline{K}_A = \frac{3}{2}k \cdot T_A\end{array}\right\}(:)\frac{\overline{K}_B}{\overline{K}_A} = \frac{\frac{3}{2}k \cdot T_B}{\frac{3}{2}k \cdot T_A} = \frac{2\overline{K}_A}{\overline{K}_A} = \frac{T_B}{300} \Rightarrow T_B = 2 \cdot 300K = 600K$$

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{3L}{300} = \frac{V_B}{600} \Rightarrow V_B = 6L$$

B: $P_B = 8atm$, $V_B = 6L$, $T_B = 600K$

BΓ: ισόθερμη εκτόνωση: $T_\Gamma = T_B = 600K$

$$\left.\begin{array}{l}\rho_B = \frac{m_{O\Lambda}}{V_B} \\ \rho_\Gamma = \frac{m_{O\Lambda}}{V_\Gamma} \\ \rho_B = 2\rho_\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m_{O\Lambda}}{V_B} = 2\frac{m_{O\Lambda}}{V_\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{V_B} = \frac{2}{V_\Gamma} \Rightarrow V_\Gamma = 2V_B = 2 \cdot 6L = 12L$$

Νόμος Boyle

$$P_B \cdot V_B = P_\Gamma \cdot V_\Gamma \Rightarrow 8 \cdot 6atm = P_\Gamma \cdot 12 \Rightarrow P_\Gamma = \frac{48}{12}atm \Rightarrow P_\Gamma = 4atm$$

Γ: $P_\Gamma = 4atm$, $V_\Gamma = 12L$, $T_\Gamma = 600K$

ΓΔ: ισόχωρη ψύξη: $V_\Delta = V_\Gamma = 12L$

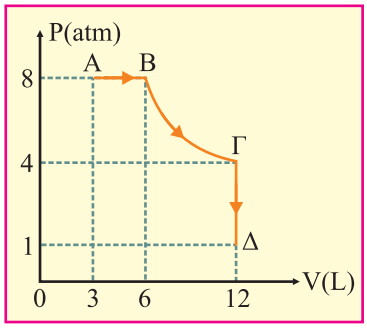
$$\left.\begin{array}{l}\upsilon_{\varepsilon\nu(\Gamma)} = \sqrt{\frac{3RT_\Gamma}{M_r}} \\ \upsilon_{\varepsilon\nu(\Delta)} = \sqrt{\frac{3RT_\Delta}{M_r}}\end{array}\right\}(:)\frac{\upsilon_{\varepsilon\nu(\Gamma)}}{\upsilon_{\varepsilon\nu(\Delta)}} = \frac{\sqrt{\frac{3RT_\Gamma}{M_r}}}{\sqrt{\frac{3RT_\Delta}{M_r}}} \Rightarrow \frac{\upsilon_{\varepsilon\nu(\Gamma)}}{\frac{\upsilon_{\varepsilon\nu(\Gamma)}}{2}} = \sqrt{\frac{3RT_\Gamma \cdot M_r}{3RT_\Delta \cdot M_r}} \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{600}{T_\Delta}} \Rightarrow$$

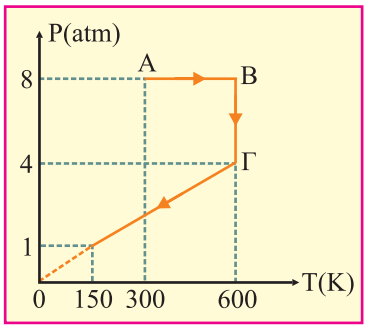
$$4=\frac{600}{T_\Delta}\Rightarrow T_\Delta=\frac{600}{4}K\Rightarrow T_\Delta=150K$$

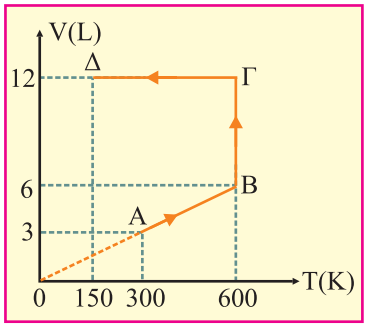
$$\frac{P_\Gamma}{T_\Gamma}=\frac{P_\Delta}{T_\Delta}\Rightarrow\frac{4atm}{600}=\frac{P_\Delta}{150}\Rightarrow P_\Delta=\frac{600}{600}atm\Rightarrow P_\Delta=1atm$$

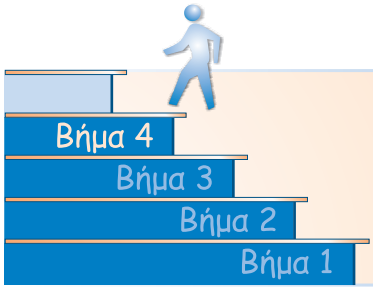
Δ: $P_\Delta=1atm$, $V_\Delta=12L$, $T_\Delta=150K$

ii.









Λύνουμε μόνοι μας

1. $n = \frac{4}{R}$ mol ιδανικού αερίου βρίσκονται σε δοχείο όγκου 2L υπό πίεση $18 \cdot 10^5\ N/m^2$. Το αέριο υφίσταται τις εξής διαδοχικές μεταβολές: εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι να εξαπλασιαστεί ο όγκος του, ψύχεται ισοβαρώς μέχρι να υποτριπλασιαστεί η θερμοκρασία του, συμπιέζεται ισόθερμα και επιστρέφει με ισόχωρη θέρμανση στο αρχικό σημείο.

α. Να παρασταθεί η παραπάνω κυκλική μεταβολή σε διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β. Να δειχτεί ότι:

i. $\frac{P_\Delta}{T_\Gamma} = \frac{P_A}{T_B}$ ii. $V_\Gamma \cdot T_A = V_B \cdot T_\Delta$

Δίνεται: $R = 8{,}314$ στο S.I.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Ένα δοχείο όγκου 1200mL περιέχει Ήλιο (He) σε θερμοκρασία $123^o C$. Η πίεση του αερίου είναι 10atm. Πόσα mol περιέχονται στο δοχείο; Υπολογίστε την πυκνότητα του αερίου.

Δίνονται: $1atm = 1{,}013 \cdot 10^5\ N/m^2$, $R = 8{,}314$ (στο S.I.) και η γραμμομοριακή μάζα του $He = 4g/mol$.

.....

.....

.....

.....

.....

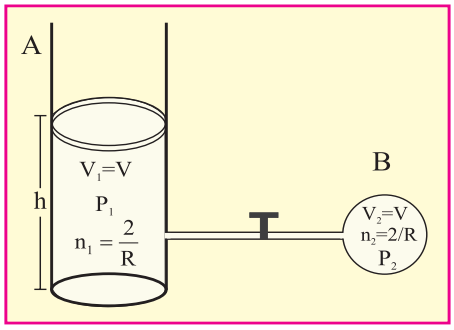
.....

.....

.....

.....

3. Κοίλο σφαιρικό δοχείο Β όγκου $V_2 = V = 10^{-2}m$ συνδέεται μέσω σωλήνα αμελητέου όγκου με κυλινδρικό κατακόρυφο δοχείο αρχικού όγκου $V_1 = 10^{-2}m$. Το πάνω μέρος του κυλίνδρου κλείνεται με αεροστεγές έμβολο το οποίο έχει αμελητέο βάρος και ισορροπεί. Η ενεργός ταχύτητα των μορίων στο δοχείο (Α) και η ενεργός ταχύτητα των μορίων στο δοχείο (Β) ικανοποιούν τη σχέση $\upsilon_{B,\varepsilon\nu} = \sqrt{2}\upsilon_{A,\varepsilon\nu}$. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $P_{\alpha\tau\mu} = 10^5 N/m^2$ και το ύψος $h = 1m$. Κάθε δοχείο περιέχει το ίδιο αριθμό mol $n_1 = n_2 = \frac{2}{R}$ όπου R η παγκόσμια σταθερά των αερίων σε μονάδες S.I. Να υπολογισθούν:



α. η θερμοκρασία του αερίου στο δοχείο Α

β. η πίεση του αερίου στο δοχείο Β.

γ. Ανοίγουμε την στρόφιγγα και διαπιστώνουμε ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα το έμβολο ισορροπεί σε μια νέα θέση ψηλότερα από την αρχική και το αέριο έχει μια ενιαία θερμοκρασία $T' = 700K$.

i. πόσο μετακινήθηκε το έμβολο;

ii. πόσα mol αερίου μετακινήθηκαν από το ένα δοχείο στο άλλο;

(Η απάντηση στο (ii) ερώτημα να δοθεί σε συνάρτηση με την σταθερά R).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

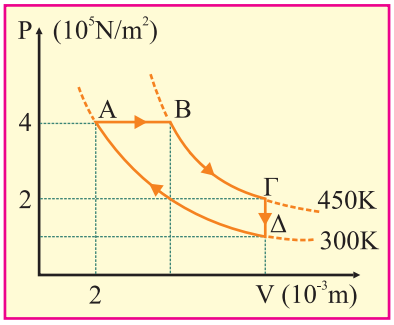
4. **Ιδανικό αέριο υφίσταται την κυκλική μεταβολή του σχήματος.**

α. Να χαρακτηρίσετε κάθε μεταβολή.

β. Να βρείτε τα V_B, V_Γ, P_Δ.

γ. Να γίνουν τα διαγράμματα $P-T$, $V-T$.

δ. Αν η πυκνότητα του αερίου στη κατάσταση Α είναι $0,3\frac{kg}{m^3}$, να υπολογιστεί η ενεργός του ταχύτητα στην κατάσταση αυτή.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. **Μια ποσότητα ιδανικού αερίου $n=\frac{4}{3}mol$ βρίσκεται μέσα σε δοχείο όγκου $V_A=6L$ και πίεση $P_A=2\cdot10^5\frac{N}{m^2}$. Θερμαίνουμε το αέριο ισοβαρώς μέχρι την θερμοκρασία $T_B=400K$, μετά ψύχουμε ισόχωρα μέ-**

χρι την κατάσταση Γ και τέλος το επαναφέρουμε στην αρχική κατάσταση ισόθερμα.

α. Να βρείτε την T_A, V_B και $P_Γ$.

β. Να γίνουν τα διαγράμματα $P-V$, $P-T$, $V-T$.

γ. Να βρείτε το λόγο των ενεργών ταχυτήτων για τις καταστάσεις Β και Γ. Δίνεται: $R = 8,31 \frac{J}{mol \cdot K}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Δοχείο όγκου $V = 2L$ περιέχει ιδανικό αέριο He υπό πίεση $P = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ και πυκνότητα $\rho = 0,2 \frac{kg}{m^3}$. Να βρείτε:

α. την θερμοκρασία του αερίου

β. την ενεργό ταχύτητα των μορίων του

γ. τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου

δ. τη συνολική κινητική ενέργεια του αερίου.

Δίνονται: $R = 8,31 \frac{J}{mol \cdot K}$, $M_{He} = 4 \frac{gr}{mol}$ και $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{μορια}{mol}$.

.....

.....

.....

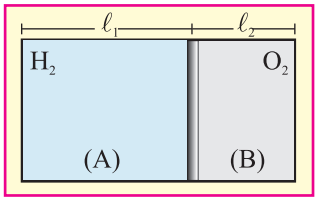
.....

.....

.....

.....

7. Ένας κύλινδρος με ανένδοτα τοιχώματα χωρίζεται σε δύο τμήματα Α και Β με θερμομονωτικό έμβολο που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Στο τμήμα Α υπάρχουν $6g\,H_2$ ενώ στο τμήμα Β υπάρχουν $1{,}5mol\,O_2$. Το έμβολο ισορροπεί όταν τα αέρια βρίσκονται σε θερμοκρασία $T = 350K$.



α. Υπολογίστε το λόγο $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

β. Θερμαίνουμε το O_2 μέχρι να αποκτήσει θερμοκρασία $T_2 = 800K$ και το H_2 μέχρι να αποκτήσει θερμοκρασία T_1 οπότε το έμβολο ισορροπεί στο μέσο του κυλίνδρου. Βρείτε την T_1.

γ. Υπολογίστε το λόγο των ενεργών ταχυτήτων των μορίων του H_2 και του O_2 στην αρχική και στην νέα κατάσταση.

Δίνονται: $M_{H_2} = 2\frac{gr}{mol}$ και $M_{O_2} = 32\frac{gr}{mol}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Βήμα 5
Βήμα 4
Βήμα 3
Βήμα 2
Βήμα 1

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α.1. Ίσες ποσότητες οξυγόνου και υδρογόνου βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία. Τότε έχουν τις ίδιες:

α. ενεργές ταχύτητες
β. πιέσεις
γ. μέσες κινητικές ενέργειες
δ. ίδιες επιταχύνσεις

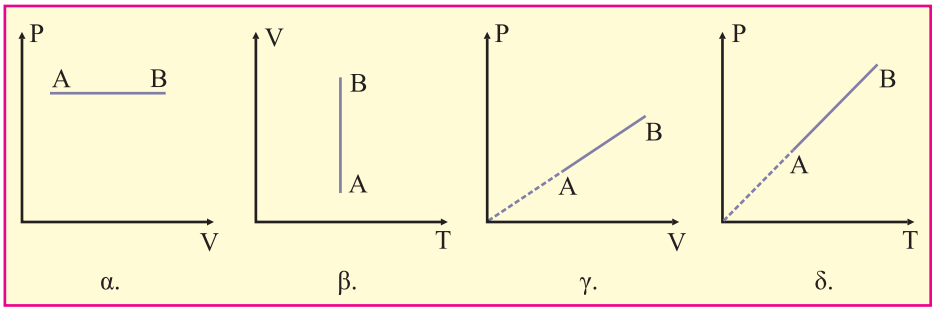
2. Ποσότητα ιδανικού αερίου ψύχεται αλλά η πυκνότητα του παραμένει σταθερή. Η πίεση του αερίου:

α. αυξάνεται
β. μειώνεται
γ. μένει σταθερή
δ. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε

3. Εάν τετραπλασιάσουμε την θερμοκρασία μιας ποσότητας ιδανικού αερίου τότε η ενεργός ταχύτητα των μορίων του:

α. διπλασιάζεται
β. υποδιπλασιάζεται
γ. τετραπλασιάζεται
δ. δεν αλλάζει

4. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αναφέρεται σε τυχαία μεταβολή:



Β. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

α. Αν σε μια μεταβολή ΑΒ αερίου ισχύει $P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B$ τότε η μεταβολή αυτή είναι οπωσδήποτε ισόθερμη.

β. Όταν έχουμε εκτόνωση αερίου τότε ο όγκος του αυξάνεται ενώ στην συμπίεση ο όγκος του αερίου μειώνεται.

γ. Γραμμομοριακή μάζα (Μ) είναι η μάζα του mol.

δ. Η καταστατική εξίσωση $PV = n \cdot R \cdot T$ ισχύει για κάθε κατάσταση ισορροπίας του ιδανικού αερίου.

(Μονάδες 25)

Θέμα 2ο

1. Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται σε δοχείο όγκου V ασκώντας πίεση P. Τοποθετούμε το αέριο σε δοχείο όγκου $\frac{V}{2}$ και τότε ασκεί πίεση 2P. Να βρείτε:

α. πόσο μεταβλήθηκε η θερμοκρασία του αερίου

β. πόσο μεταβλήθηκε η ενεργός ταχύτητα των μορίων του

2. Ιδανικό αέριο εκτονώνεται ισοβαρώς έτσι ώστε να διπλασιαστεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του. Να βρείτε την μεταβολή του όγκου του αερίου.

3. Να παρασταθεί γραφικά σε διάγραμμα $P \cdot V - T$ η καταστατική εξίσωση για ποσότητα ιδανικού αερίου. Τι εκφράζει η κλίση της ευθείας;

(Μονάδες 25)

Θέμα 3ο

Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε κατάσταση (Α) όπου η πίεση και η θερμοκρασία του έχουν τις τιμές $P_A = 10^5\ N/m^2$ και $T_A = 400K$. Αν η πυκνότητα του αερίου είναι $\rho = 0,3\frac{kg}{m^3}$, να βρείτε:

α. την ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου

β. τη μέση μεταφορική κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου

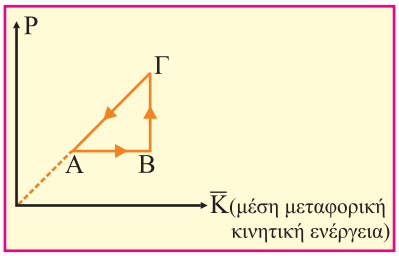
γ. τη θερμοκρασία στην οποία πρέπει να θερμανθεί το αέριο, ώστε να διπλασιαστεί η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του.

Δίνεται η μάζα ενός μορίου του αερίου: $m = \frac{5}{3} \cdot 10^{-26} kg$.

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η κυκλική μεταβολή μιας ποσότητας ιδανικού αερίου.



Αν η θερμοκρασία στην κατάσταση Α είναι $T_A = 200K$ και η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου στην κατάσταση Γ είναι διπλάσια απ' ότι στην κατάσταση Α,

α. να παραστήσετε ποιοτικά την παραπάνω κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα $P-V$ και $V-T$

β. να βρείτε την θερμοκρασία στις καταστάσεις Β και Γ

γ. να βρείτε τον λόγο των μεταφορικών κινητικών ενεργειών στις καταστάσεις Α και Β

δ. δείξτε ότι η πίεση στην κατάσταση Γ είναι τετραπλάσια της πίεσης στην κατάσταση Α.

(Μονάδες 25)

Κεφάλαιο 2ο

Νόμοι θερμοδυναμικής - Θερμικές μηχανές

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο νόμοι θερμοδυναμικής - θερμικές μηχανές πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Ποιες μεταβολές λέγονται αντιστρεπτές και ποιες όχι και πως παριστάνονται.
- ✓ Τι ονομάζουμε κατάσταση ισορροπίας αερίου.
- ✓ Ποιο μέγεθος ονομάζουμε θερμότητα και που εμφανίζεται.
- ✓ Τι είναι η εσωτερική ενέργεια και από τι εξαρτάται.
- ✓ Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας δεν εξαρτάται από το είδος της μεταβολής αλλά μόνο από την αρχική και την τελική κατάσταση.
- ✓ Τι είναι οι γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες και ότι το κάθε αέριο έχει τις δικές του.
- ✓ Πως υπολογίζονται το έργο (W) η θερμότητα (Q) και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας (ΔU) για κάθε μεταβολή.
- ✓ Το έργο για κάθε μεταβολή ισούται με την αριθμητική τιμή του εμβαδού σε διάγραμμα P-V μεταξύ της μεταβολής και του άξονα του όγκου.
- ✓ Το έργο κατά την εκτόνωση είναι θετικό ενώ κατά την συμπίεση αρνητικό.
- ✓ Να διατυπώνει και να εφαρμόζει τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο για κάθε μεταβολή.
- ✓ Η θερμότητα και το έργο σε αντίθεση με την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας εξαρτώνται από το είδος της μεταβολής.
- ✓ Τι είναι η θερμική μηχανή.
- ✓ Σε κυκλική μεταβολή το $\Delta U = 0$.
- ✓ Τι ονομάζουμε απόδοση θερμικής μηχανής.

- ✓ Πως διατυπώνεται ο 2ος θερμοδυναμικός νόμος.
- ✓ Από ποιες μεταβολές αποτελείται ο κύκλος Carnot.
- ✓ Η μεγαλύτερη σε απόδοση θερμική μηχανή ανάμεσα σε όλες όσες δουλεύουν μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών, είναι η μηχανή Carnot.
- ✓ Ποια μεταβολή ονομάζουμε αδιαβατική.
- ✓ Πότε η θερμότητα (Q) και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας (ΔU) παίρνουν θετικές και πότε αρνητικές τιμές.
- ✓ Τι εκφράζει ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος.
- ✓ Γιατί οι αδιαβατικές μεταβολές είναι πιο απότομες από τις ισόθερμες.
- ✓ Γιατί δεν μπορούν να τέμνονται δύο ισόθερμες ή δύο αδιαβατικές.

Νόμοι θερμοδυναμικής: Τύποι - Βασικές έννοιες

- **Έργο, θερμότητα, μεταβολή εσωτερικής ενέργειας**

	Q	W	ΔU
Ισόχωρη	$nC_v\Delta T$	0	$nC_v\Delta T$
Ισόθερμη	W	$nRT\ln V_B/V_A$ $nRT\ln P_A/P_B$ $PV\ln V_B/V_A$	0
Ισοβαρής	$nC_p\Delta T$	$P\cdot\Delta V = n\cdot R\cdot\Delta T$	$nC_v\Delta T$
Αδιαβατική	0	$\frac{P_2\cdot V_2 - P_1\cdot V_1}{1-\gamma}$	$nC_v\Delta T$
Κυκλικές	ΣQ	ΣW	0

- **1ος Νόμος Θ/Δ:** $\mathbf{Q = W + \Delta U}$

Το ποσό θερμότητας που ανταλλάσει ένα αέριο με το περιβάλλον του είναι ίσο με το άθροισμα του έργου που παράγει ή καταναλώνει και τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας.

- **2ος Νόμος Θ/Δ: Διατύπωση Kelvin - Planck**

Είναι αδύνατη η κατασκευή μιας θερμικής μηχανής στην οποία ένα αέριο εκτελώντας κυκλική μεταβολή να μετατρέπει ένα δεδομένο ποσό θερμότητας εξ'ολοκλήρου σε ωφέλιμο έργο.

Διατύπωση Clausius

Είναι αδύνατη η μεταφορά θερμότητας από ένα ψυχρό σε ένα θερμό σώμα χωρίς την κατανάλωση έργου.

- **Πρόσημα**

Στις εκτονώσεις $(\Delta V > 0)$ είναι $W > 0$ ενώ στις συμπιέσεις $(\Delta V < 0)$ είναι $W < 0$.

Στις θερμάνσεις $(\Delta T > 0)$ είναι $\Delta U > 0$ ενώ στις ψύξεις $(\Delta T < 0)$ είναι $\Delta U < 0$.

Όταν ένα αέριο προσλαμβάνει θερμότητα από το περιβάλλον τότε $Q > 0$, ενώ όταν αποβάλλει θερμότητα προς το περιβάλλον τότε $Q < 0$.

- **Θερμικές μηχανές**

Απόδοση $e = \dfrac{W_{ΟΛ}}{Q_{προσφ}} = \dfrac{Q_{προσφ} - |Q_{αποβ}|}{Q_{προσφ}} = 1 - \dfrac{|Q_{αποβ}|}{Q_{προσφ}}$

Ειδικά στον κύκλο Carnot αποδεικνύεται ότι $\dfrac{T_c}{T_h} = \dfrac{|Q_{αποβ}|}{Q_{προσφ}}$ επομένως

$e = 1 - \dfrac{T_c}{T_h}$.

ΘΕΩΡΙΑ 1

α. Υπολογισμός εσωτερικής ενέργειας.

β. Σχέση C_P και C_V.

γ. Υπολογισμός γραμμομοριακών ειδικών θερμοτήτων και αδιαβατικού συντελεστή (γ) στα ιδανικά αέρια.

Απόδειξη

α. $U = N \cdot \bar{K} = N \cdot \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV$

β. Εφαρμόζουμε 1ο νόμο Θερμοδυναμικής σε ισοβαρή εκτόνωση ιδανικού αερίου:

$$Q = W + \Delta U \Rightarrow n \cdot C_P \cdot \Delta T = P \cdot \Delta V + n \cdot C_V \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow n \cdot C_P \cdot \Delta T = n \cdot R \cdot \Delta T + n \cdot C_V \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow C_P = R + C_V$$

γ. $U = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2}nR \cdot \Delta T$

όμως: $\Delta U = nC_V\Delta T$ επομένως $C_V = \frac{3}{2}R$

τέλος, $C_P = C_V + R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2}R$

$$\text{ενώ } \gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} \rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Να αποδείξετε ότι το έργο που παράγει ένα αέριο όταν ο όγκος του αυξάνεται κατά μικρή ποσότητα ΔV είναι $\Delta W = P\Delta V$ όπου P η πίεση του.**

Απόδειξη

Έστω ένα αέριο σε κύλινδρο που κλείνεται από εφαρμοστό έμβολο. Καθώς τα μόρια του αερίου μέσα στον κύλινδρο συγκρούονται με τα τοιχώματά του ασκούν δυνάμεις σε αυτά. Για μια μικρή μετατόπιση του εμβόλου κατά Δx το έργο που παράγει η δύναμη που ασκεί το αέριο σε αυτό είναι: $\Delta W = F \cdot \Delta x$ όμως $F = P \cdot A$ όπου F η ολική δύναμη που ασκεί το αέριο στο έμβολο. Επομένως $\Delta W = P \cdot A \cdot \Delta x = P \cdot \Delta V$ όπου ΔV μια μικρή μεταβολή του όγκου του αερίου.

***ΘΕΩΡΙΑ 3** **Να αποδείξετε την σχέση $\frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{T_2}{T_1}$**

Απόδειξη

Ισόθερμη εκτόνωση ΑΒ (N. Boyle): $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$

Αδιαβατική εκτόνωση ΒΓ (N. Poisson): $P_2 \cdot V_2^{\gamma} = P_3 \cdot V_3^{\gamma}$

Ισόθερμη συμπίεση ΓΔ (N. Boyle): $P_3 \cdot V_3 = P_4 \cdot V_4$

Αδιαβατική συμπίεση ΒΓ (N. Poisson): $P_4 \cdot V_4^{\gamma} = P_1 \cdot V_1^{\gamma}$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων, παίρνουμε:

$$P_1V_1 \cdot P_2V_2^{\gamma} \cdot P_3V_3 \cdot P_4V_4^{\gamma} = P_2V_2 \cdot P_3V_3^{\gamma} \cdot P_4V_4 \cdot P_1V_1^{\gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{V_2^{\gamma}}{V_2} \cdot \frac{V_4^{\gamma}}{V_4} = \frac{V_3^{\gamma}}{V_3} \cdot \frac{V_1^{\gamma}}{V_1} \Rightarrow V_2^{\gamma-1} \cdot V_4^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1} \cdot V_1^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (1)$$

Στην ισόθερμη εκτόνωση ΑΒ: $Q_h = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$

Στην ισόθερμη συμπίεση ΓΔ: $Q_c = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} \Rightarrow$

$$|Q_c| = nRT_2 |\ln V_4 - \ln V_3| \Rightarrow |Q_c| = nRT_2 |\ln V_3 - \ln V_4| \Rightarrow |Q_c| = nRT_2 \left|\ln\frac{V_3}{V_4}\right| \Rightarrow$$

$$|Q_c| = nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}$$

Άρα: $\frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{T_2}{T_1}$

Τρείς σπουδαίες "λεπτομέρειες" στην αδιαβατική μεταβολή.

α. Υπολογισμός έργου: $W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma}$

1ος Θ.Ν. στην αδιαβατική μεταβολή (Q = 0)

$$W = -\Delta U = -nC_v(T_2 - T_1) \Rightarrow W = -nC_v\left(\frac{P_2V_2}{nR} - \frac{P_1V_1}{nR}\right) \Rightarrow$$

$$W = \frac{C_v}{R}(P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1) \quad (1)$$

Όμως $\frac{C_v}{R} = \frac{C_v}{C_p - C_v} = \frac{1}{\frac{C_p}{C_v} - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $W = -\frac{1}{\gamma-1}(P_2V_2 - P_1V_1) \Rightarrow W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma}$.

β. Ο N.Poisson στην αδιαβατική μπορεί να συνδέσει ανά δύο τα P, V, T.

i. ο "κλασικός": $P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma}$

ii. Σχέση V, T:

$$P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma} \Rightarrow \frac{nRT_1}{V_1} \cdot V_1^{\gamma} = \frac{nRT_2}{V_2} \cdot V_2^{\gamma} \Rightarrow T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}$$

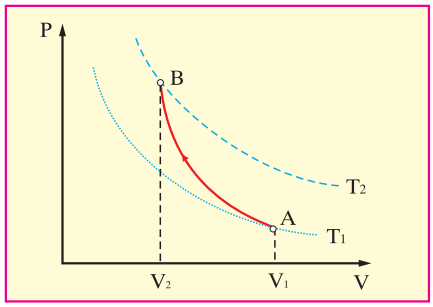
iii. Σχέση P, T:

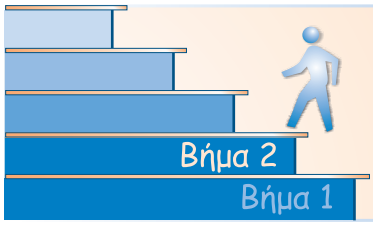
$$P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma} \Rightarrow P_1\left(\frac{nRT_1}{P_1}\right)^{\gamma} = P_2\left(\frac{nRT_2}{P_2}\right)^{\gamma} \Rightarrow P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma} \quad .$$

γ. Γιατί οι αδιαβατικές καμπύλες είναι πιο απότομες από τις ισόθερμες;

Μια εξήγηση: (υπάρχουν κι άλλες)
Κατά την αδιαβατική συμπίεση $A \rightarrow B$ $(Q=0)$ $1^{ος}$ Θ.Ν $W = -\Delta U$

Κατά την συμπίεση είναι $W < 0$, οπότε $\Delta U > 0$ δηλαδή το αέριο θερμαίνεται.
Άρα η αδιαβατική καμπύλη AB θα τέμνει συνεχώς ισόθερμες υψηλότερης θερμοκρασίας, με συνέπεια να είναι πιο απότομη (μεγαλύτερη κλίση) από τις ισόθερμες.





Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 68 - 71: Ερωτήσεις 2.10, 2.11, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.27, 2.28

σ.σ 76 - 79: Προβλήματα 2.57, 2.60, 2.63, 2.64, 2.65, 2.66, 2.70, 2.71α, β, 2.72α

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ.σ. 51 - 56: Τα παραδείγματα 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8

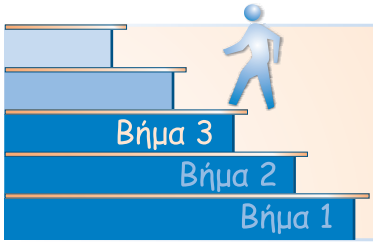
σ.σ. 68 -75: Τα παραδείγματα 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14

σ. 61: Ξεχωριστό θέμα 1

σ. 69: Ξεχωριστό θέμα 1

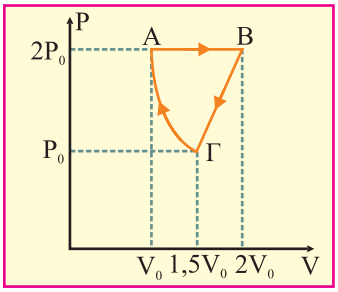
σ.σ. 59 - 61: Ασκήσεις 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10

σ.σ. 77, 78: Ασκήσεις 2.12, 2.14



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Δίνεται η κυκλική μεταβολή του σχήματος. Να συμπληρωθεί ο πίνακας θέτοντας το κατάλληλο πρόσημο σε κάθε τετράγωνο. Η ΓΑ είναι αδιαβατική θέρμανση.



Λύση:

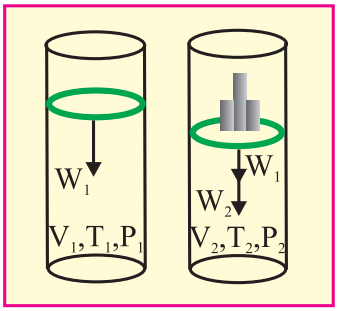
Γνωρίζουμε ότι:

- Η ΔU είναι θετική όταν αυξάνεται η θερμοκρασία (μεταβολές ΑΒ και ΓΑ) και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση (μεταβολή ΒΓ).
- Το W είναι θετικό όταν αυξάνεται ο όγκος (μεταβολή ΑΒ) και αρνητικό όταν μειώνεται ο όγκος (μεταβολές ΒΓ και ΓΑ).
- Το Q είναι θετικό όταν αυξάνεται η θερμοκρασία στην ισοβαρή μεταβολή (ΑΒ), ενώ στην αδιαβατική θέρμανση είναι μηδέν (ΓΑ).
  Το πρόσημο του Q επίσης μπορεί να εξαχθεί και από το 1ο θερμοδυναμικό μόνο (μεταβολή ΒΓ).

Έτσι συμπληρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα:

	ΔU	W	Q
A → B	+	+	+
B → Γ	-	-	-
Γ → A	+	-	0

2. **Κυλινδρικό δοχείο με αδιαβατικά τοιχώματα έχει κατακόρυφο άξονα και κλείνεται στο πάνω μέρος του με έμβολο επιφάνειας Α και βάρους W_1. Το αέριο στο δοχείο περιέχει ήλιο σε θερμοκρασία T_1 και καταλαμβάνει όγκο V_1. Προσθέτουμε σιγά-σιγά διάφορα σταθμά συνολικού βάρους W_2 πάνω στο έμβολο. Το ήλιο συμπιέζεται και καταλαμβάνει όγκο V_2. Να υπολογίσετε:**



α. τη νέα θερμοκρασία του αερίου
β. τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας
γ. το έργο που καταναλώνεται από το αέριο.

Δίνεται $P_{ατμ}$, $C_V = \frac{3}{2}R$.

Λύση:

Από την ισορροπία του εμβόλου πριν την τοποθέτηση των σταθμών:

$$P_1 = P_{ατμ} + \frac{W_1}{A} \quad (1)$$

Από την ισορροπία του εμβόλου μετά την τοποθέτηση των σταθμών:

$$P_2 = P_{ατμ} + \frac{W_1 + W_2}{A} \quad (2)$$

Από το συνδυαστικό νόμο έχουμε: $\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{P_1 \cdot V_1}$

Σε κάθε αντιστρεπτή μεταβολή ιδανικού αερίου ισχύει: $\Delta U = nC_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} nR\Delta T$

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1}(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1}\left(\frac{P_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{P_1 \cdot V_1} - T_1\right) = \frac{3}{2}(P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1)$$

Επειδή η μεταβολή είναι αδιαβατική $(Q = 0)$ ισχύει $W = -\Delta U$ επομένως

$W = -\frac{3}{2}(P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1)$ με P_1 και P_2 γνωστά από τις (1) και (2).

3. **Ιδανικό αέριο συμπιέζεται αντιστρεπτά ισόθερμα από την κατάσταση Α (P_0, V_0, T_0) έως ότου ο όγκος του υποτριπλασιαστεί στην κατάσταση Β. Κατόπιν εκτονώνεται αντιστρεπτά ισοβαρώς μέχρι την κατάσταση Γ, από την οποία με ισόχωρη ψύξη θα επανέλθει στην αρχική του κατάσταση Α.**

α. Να παρασταθούν γραφικά οι μεταβολές σε άξονες πίεσης (P) - όγκου (V).

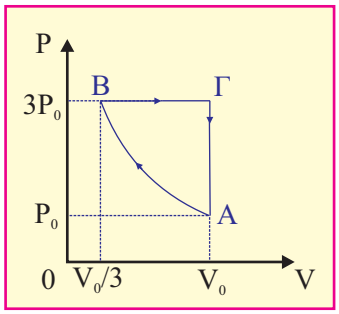
β. Να βρεθεί το έργο που παράγεται κατά τη διάρκεια της κυκλικής μεταβολής ΑΒΓΑ.

γ. Να βρεθεί η απόδοση του κύκλου.

Δίνεται: $\ell n3 \simeq 1,1$

Λύση:

α.



β. $$W_{AB} = n \cdot R \cdot T_0 \cdot \ln\frac{\frac{V_0}{3}}{V_0} = P_0 \cdot V_0 \cdot \ln\frac{1}{3} = -P_0 \cdot V_0 \cdot \ln 3 = -1,1 \cdot P_0 \cdot V_0$$

$$W_{B\Gamma} = 3P_0\left(V_0 - \frac{V_0}{3}\right) = 3P_0\frac{2V_0}{3} = 2P_0 \cdot V_0 \text{ και } W_{\Gamma A} = 0$$

άρα $W_{o\lambda} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = 0,9P_0V_0$

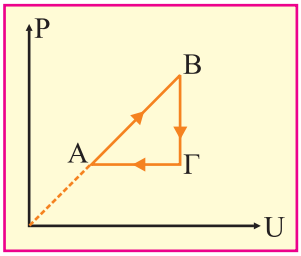
γ. το αέριο απορροφά θερμότητα στην μεταβολή ΒΓ:

$$Q_{B\Gamma} = n \cdot C_p \cdot \Delta T = n\frac{5}{2}R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}3P_0 \cdot \Delta V = \frac{5}{2}3P_0\left(V_0 - \frac{1}{3}V_0\right) = 5P_0 \cdot V_0$$

η απόδοση του παραπάνω κύκλου είναι:

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}} = \frac{0,9P_0 \cdot V_0}{5P_0V_0} = 0,18 = 18\%$$

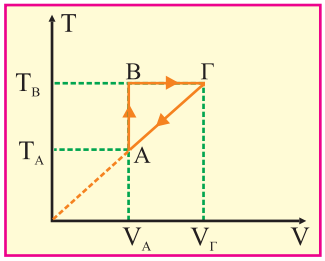
4. **Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου με $C_V = 3\frac{R}{2}$, εκτελεί την κυκλική μεταβολή που φαίνεται στο σχήμα. Αν $V_Γ = 2V_A$, $U_A = 4,5 \cdot 10^5\,J$ και $U_Γ = 9 \cdot 10^5\,J$, να γίνουν τα διαγράμματα T-V, P-V, και να υπολογιστεί η ενέργεια που απορροφά το αέριο, με τη μορφή μηχανικού έργου, στην παραπάνω κυκλική μεταβολή.**



Δίνεται: $R = 8,314$ στο S.I.

Λύση:

Με δεδομένο το γεγονός ότι η εσωτερική ενέργεια είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας, το διάγραμμα T-V θα είναι το ακόλουθο:

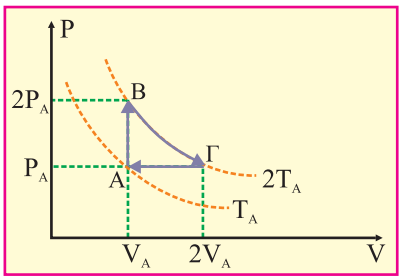


Επίσης: $\frac{U_Γ}{U_A} = \frac{T_Γ}{T_A} \Rightarrow \frac{T_Γ}{T_A} = 2 \Rightarrow T_Γ = 2T_A = T_B$

Για την ισόχωρη μεταβολή AB:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \Rightarrow P_B = \frac{P_A T_B}{T_A} = \frac{P_A 2T_A}{T_A} \Rightarrow P_B = 2P_A$$

Άρα το διάγραμμα P-V είναι το ακόλουθο:



Τα μεγέθη της κάθε κατάστασης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Α	Β	Γ
P_A	$P_B = 2P_A$	$P_\Gamma = P_A$
V_A	$V_B = V_A$	$V_\Gamma = 2V_A$
T_A	$T_B = 2T_A$	$T_\Gamma = T_B = 2T_A$

ΑΒ(ισόχωρη): $W_{AB} = 0$

ΒΓ(ισόθερμη): $W_{B\Gamma} = n \cdot R \cdot T_B \cdot \ln \dfrac{V_\Gamma}{V_A} = 2n \cdot R \cdot T_A \ln 2$

ΓΑ(ισοβαρής): $W_{\Gamma A} = P_A (V_A - V_\Gamma) = P_A (V_A - 2V_A) = -P_A V_A = -n \cdot R \cdot T_A$

Άρα, το συνολικό έργο είναι: $W_{ολ} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = n \cdot R \cdot T_A (2\ln 2 - 1)$ (I)

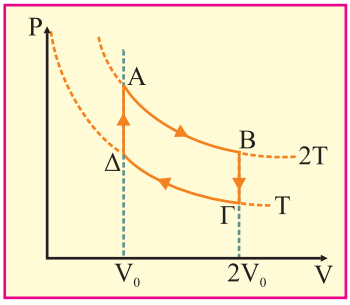
Όμως, $\Delta U_{\Gamma A} = nC_V (T_A - T_\Gamma) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_A - U_\Gamma = n\frac{3R}{2}(T_A - 2T_A) \Rightarrow (4{,}5 \cdot 10^5 - 9 \cdot 10^5) J = -\frac{3}{2} n \cdot R \cdot T_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot R \cdot T_A = 3 \cdot 10^5 \, J .$$

Οπότε, η (I) γίνεται: $W_{ολ} = 3 \cdot 10^5 (2\ln 2 - 1) J$

5. Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής που λειτουργεί με τον θερμοδυναμικό κύκλο του σχήματος.
Δίνεται: $C_V = 3R/2$



Λύση:

Ο συντελεστής απόδοσης δίνεται, όπως είναι γνωστό από τη σχέση $\alpha = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_h}$, όπου $Q_C = Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma\Delta}$ το ποσό θερμότητας που αποβάλλει το σύστημα προς το περιβάλλον, και $Q_h = Q_{AB} + Q_{\Delta A}$ το προσφερόμενο στο αέριο ποσό θερμότητας. Τα επιμέρους ποσά θερμότητας υπολογίζονται ως εξής:

$$Q_{AB} = nRT_2 \cdot \ell n \frac{2V}{V} = 2nRT \cdot \ell n 2$$

$$Q_{B\Gamma} = nC_V (T - 2T) = -nC_V T$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = nRT \cdot \ell n \frac{V}{2V} = -nRT \cdot \ell n 2$$

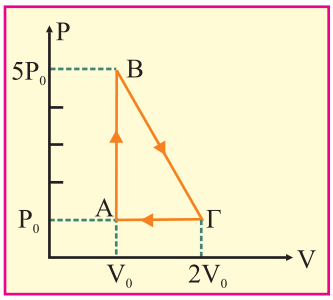
$$Q_{\Delta A} = nC_V (2T - T) = nC_V T$$

Άρα, $Q_c = -nC_V T - nRT \cdot \ell n 2 \Rightarrow |Q_c| = nT(C_V + R \cdot \ell n 2)$

$$Q_h = 2nRT \cdot \ell n 2 + nC_V T \Rightarrow Q_h = nT(2R \cdot \ell n 2 + C_V)$$

$$\alpha = 1 - \frac{C_V + R \cdot \ell n 2}{C_V + 2R \cdot \ell n 2} = \frac{R \cdot \ell n 2}{C_V + 2R \cdot \ell n 2} = \frac{R \cdot \ell n 2}{\frac{3R}{2} + 2R \cdot \ell n 2} = \frac{\ell n 2}{1{,}5 + 2 \cdot \ell n 2}$$

6. Ένα αέριο, με $\gamma = \frac{5}{3}$, εκτελεί την κυκλική μεταβολή $A \to B \to \Gamma$ του σχήματος. Αν στη μεταβολή ΓΑ το αέριο προσφέρει στο περιβάλλον του θερμότητα 6000J, να υπολογιστούν:



α. το έργο της κυκλική μεταβολής $A \to B \to \Gamma \to A$

β. οι μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας στις μεταβολές ΑΒ και ΒΓ

γ. η ισχύς μιας μηχανής που λειτουργεί με τον παραπάνω κύκλο, αν εκτελεί 100 κύκλους / s.

Λύση:

α. Το έργο υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται από την κυκλική μεταβολή:

$$W = \frac{(5P_0 - P_0)\cdot(2V_0 - V_0)}{2} = 2P_0V_0$$

Όμως $Q_{ΓΑ} = nC_p(T_A - T_Γ) = \frac{5}{2}nR(T_A - T_Γ) = \frac{5}{2}(P_0V_0 - 2P_0V_0) = -\frac{5}{2}P_0V_0$

$$\Rightarrow P_0V_0 = -\frac{2Q_{ΓΑ}}{5} = -\frac{2(-6000)J}{5} \Rightarrow P_0V_0 = 2400J$$

Άρα, $W = 4800\,J$

β. Οι μεταβολές εσωτερικής ενέργειας στις μεταβολές ΑΒ και ΒΓ είναι:

$$\Delta U_{AB} = n\cdot C_V(T_B - T_A) = \frac{3}{2}n\cdot R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(5P_0V_0 - P_0V_0) =$$

$$= 6P_0V_0 = 6\cdot 2400J = 14400\,J$$

$$\Delta U_{BΓ} = n\cdot C_V(T_Γ - T_B) = \frac{3}{2}n\cdot R(T_Γ - T_B) = \frac{3}{2}(2P_0V_0 - 5P_0V_0) =$$

$$= -4,5P_0V_0 = -4,5\cdot 2400J = -10800\,J$$

γ. Η ισχύς σύμφωνα με τον ορισμό είναι το πηλίκο του ωφέλιμου έργου προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$P = \frac{W_{ΟΛ}}{t} = \frac{N}{t}W = 100\cdot 4800\,\text{Watt} = 4,8\cdot 10^5\,\text{Watt}$$

7. Μία μηχανή Carnot λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών 300 K και 1200K και σε κάθε κύκλο αποδίδει ωφέλιμο έργο 4500 J. Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής και το ποσό θερμότητας που προσφέρεται σε κάθε κύκλο στη μηχανή.

Λύση:

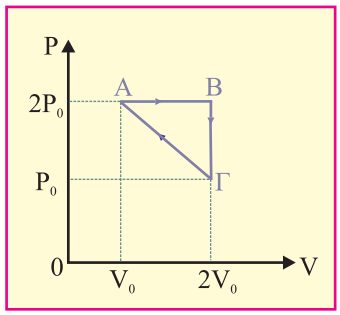
Ο συντελεστής απόδοσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - 0,25 = 0,75$$

Το ποσό θερμότητας $(Q_{προσφ.} = Q_h)$ που προσφέρεται σε κάθε κύκλο στη μηχανή υπολογίζεται από τον ορισμό της απόδοσης μηχανής:

$$\alpha = \frac{W}{Q_h} \Rightarrow Q_h = \frac{W}{\alpha} = \frac{4500J}{0,75} \Rightarrow Q_h = 6000\,J$$

8. **Ιδανικό αέριο εκτελεί την αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή ΑΒΓΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το αέριο απορροφά θερμότητα $Q_{AB} = 60\,J$ στην αντιστρεπτή μεταβολή ΑΒ:**



α. Πόσο έργο παράγει το αέριο κατά την παραπάνω κυκλική μεταβολή ΑΒΓΑ;

β. Πόση θερμότητα αποδίδει στην αντιστρεπτή μεταβολή ΓΑ;

γ. Να συγκρίνετε την απόδοση του κύκλου με την απόδοση μιας μηχανής Carnot που θα "λειτουργούσε" μεταξύ της ανώτερης και κατώτερης θερμοκρασίας του παραπάνω κύκλου.

Δίνεται: $C_V = 3R/2$, $\ln 2 = 0{,}7$.

Λύση:

α. Κατ' αρχήν $C_P = C_V + R \Rightarrow C_P = \frac{3}{2}R + R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2}R$, επίσης

$P \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$ και $\Delta P \cdot V = n \cdot R \cdot \Delta T$.

Για την ισοβαρή εκτόνωση ΑΒ το ποσό της θερμότητας Q_{AB} που απορροφά το αέριο από το περιβάλλον είναι:

$$Q_{AB} = n \cdot C_P \cdot \Delta T = n \cdot \frac{5}{2}R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}2P_0 \cdot \Delta V = \frac{5}{2}2P_0\left(2V_0 - V_0\right) = 5P_0 \cdot V_0 \Rightarrow$$

$$P_0 \cdot V_0 = \frac{Q_{AB}}{5} = \frac{60}{5}J = 12\,J$$

άρα, $W = \text{εμβαδόν} = \frac{\left(2P_0 - P_0\right)\cdot\left(2V_0 - V_0\right)}{2} = \frac{P_0 \cdot V_0}{2} = \frac{12\,J}{2} = 6\,J$

β. Είναι $P_A \cdot V_A = P_\Gamma \cdot V_\Gamma = 2P_0 \cdot V_0$ επομένως $T_A = T_\Gamma$ άρα $\Delta U_{\Gamma A} = 0$.

Από 1ο νόμο Θ.Δ.:

$$Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} + \Delta U_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} = \text{εμβαδόν τραπεζίου} = -\frac{3P_0}{2} \cdot V_0 = -18J$$

γ. η απόδοση του παραπάνω κύκλου είναι: $e = \frac{W_{ολ}}{Q_{προσφ}} = \frac{6\,J}{60\,J} = 0{,}1 = 10\%$ και η απόδοση του κύκλου Carnot είναι:

με θερμοκρασία ψυχρής δεξαμενής $T_C = T_A = T_\Gamma = \dfrac{2P_0 \cdot V_0}{n \cdot R}$ και

με θερμοκρασία θερμής δεξαμενής $T_h = T_B = \dfrac{4P_0 \cdot V_0}{n \cdot R}$

$$e_C = 1 - \frac{T_C}{T_h} = 1 - \frac{\dfrac{2P_0 \cdot V_0}{n \cdot R}}{\dfrac{4P_0 \cdot V_0}{n \cdot R}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\% .$$

9. Μια ποσότητα ιδανικού αερίου φέρεται από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α (P_0, V_0) στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β ($P_0/2, 4V_0$) με δύο τρόπους.

I. Με αντιστρεπτή ισοβαρή εκτόνωση στην ενδιάμεση κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ ($P_0, 2V_0$) και κατόπιν με μια αντιστρεπτή ισόθερμη εκτόνωση στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β ($P_0/2, 4V_0$).

II. Με αντιστρεπτή ισόχωρη ψύξη στην ενδιάμεση κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Δ ($P_0/2, V_0$) και κατόπιν με μια αντιστρεπτή ισοβαρή εκτόνωση στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β ($P_0/2, 4V_0$).

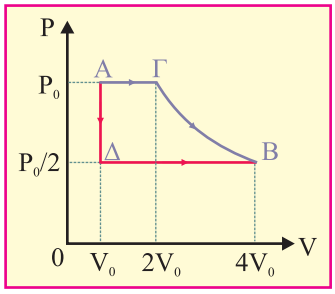
α. Να παρασταθούν γραφικά οι μεταβολές σε άξονες πίεσης - όγκου.

β. Να συγκριθεί το ποσό θερμότητας που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον στους δύο τρόπους.

Δίνεται: $C_V = 3R/2$, $\ln 2 = 0,7$.

Λύση:

α.



β. Κατ' αρχήν $C_p = C_V + R \Rightarrow C_p = \frac{3}{2}R + R \Rightarrow C_p = \frac{5}{2}R$,

επίσης $P \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$ και $\Delta P \cdot V = n \cdot R \cdot \Delta T$.

Για την ισοβαρή εκτόνωση ΑΓ το ποσό της θερμότητας $Q_{ΑΓ}$ που απορροφά το αέριο από το περιβάλλον είναι:

$$Q_{ΑΓ} = n \cdot C_p \cdot \Delta T = n \cdot \frac{5}{2}R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}P_0 \cdot \Delta V = \frac{5}{2}P_0\left(2V_0 - V_0\right) =$$

$$= \frac{5}{2}P_0 \cdot V_0 = 2{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0$$

Για την ισόθερμη εκτόνωση ΓΒ το ποσό της θερμότητας $Q_{ΑΓ}$ που απορροφά το αέριο από το περιβάλλον είναι:

$$Q_{ΓΒ} = W_{ΓΒ} = n \cdot R \cdot T_Γ \cdot \ln\frac{V_Β}{V_Γ} = P_0 \cdot 2V_0 \cdot \ln\frac{4V_0}{2V_0} = 2\ln 2 \cdot P_0 \cdot V_0 = 1{,}4 \cdot P_0 \cdot V_0$$

(Ισχύει $P_Γ \cdot V_Γ = n \cdot R \cdot T_Γ \Rightarrow P_0 \cdot 2V_0 = n \cdot R \cdot T_Γ$)

Τελικά $Q_{ΑΓΒ} = Q_{ΑΓ} + Q_{ΓΒ} \Rightarrow Q_{ΑΓΒ} = 2{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0 + 1{,}4 \cdot P_0 \cdot V_0 = 3{,}9 \cdot P_0 \cdot V_0$

Για την ισόχωρη ψύξη ΑΔ το ποσό θερμότητας $Q_{ΑΔ}$ που αποδίδει το αέριο στο περιβάλλον είναι:

$$Q_{ΑΔ} = \Delta U_{ΑΔ} = n \cdot C_V \cdot \Delta T = n \cdot \frac{3}{2}R \cdot \Delta T = \frac{3}{2}\Delta P \cdot V_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{P_0}{2} - P_0\right)V_0 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{P_0}{2}\right) \cdot V_0 = -\frac{3}{4}P_0 \cdot V_0$$

Για την ισοβαρή εκτόνωση ΔΒ το ποσό της θερμότητας $Q_{ΔΒ}$ που απορροφά το αέριο από το περιβάλλον είναι:

$$Q_{ΔΒ} = n \cdot C_p \cdot \Delta T = n\frac{5}{2}R \cdot \Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{P_0}{2} \cdot \Delta V = \frac{5}{2} \cdot \frac{P_0}{2}\left(4V_0 - V_0\right) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{P_0}{2} \cdot 3V_0 = \frac{15}{4} \cdot P_0 \cdot V_0$$

Τελικά $Q_{ΑΔΒ} = Q_{ΑΔ} + Q_{ΔΒ} \Rightarrow Q_{ΑΔΒ} = -\frac{3}{4} \cdot P_0 \cdot V_0 + \frac{15}{4} \cdot P_0 \cdot V_0 = 3 \cdot P_0 \cdot V_0$

Άρα $Q_{ΑΓΒ} > Q_{ΑΔΒ}$.

10. $n=\frac{2}{R}$ mol ιδανικού αερίου βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας $A\left(P_A, V_A=2m^3, T_A=200K\right)$ και υφίστανται τις διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές που φαίνονται στην γραφική παράσταση πίεσης - εσωτερικής ενέργειας. Αν $V_B=2V_A$ και $C_V=\frac{3R}{2}$ $(R=8,314$ στο S.I.)

α. Να βρείτε το είδος της κάθε μεταβολής.

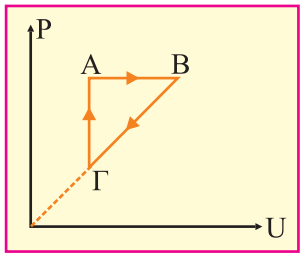
β. Να κάνετε διάγραμμα P-V.

γ. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta U_{B\Gamma}}$.

δ. Βρείτε τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων στην κατάσταση Β αν η αντίστοιχη τιμή για την κατάσταση Α είναι $4,157\cdot 10^{-21}$ J .

ε. Να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης της θερμικής μηχανής που δουλεύει με αυτόν τον κύκλο.

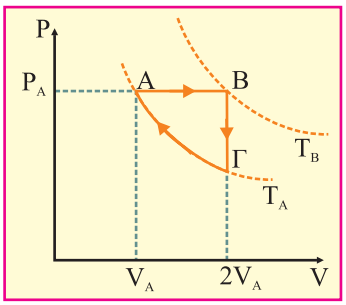
Δίνεται: $\ell n2=0,7$.



Λύση:

α. Η μεταβολή ΑΒ επειδή είναι κάθετη στον άξονα της πίεσης είναι ισοβαρής, ενώ επειδή αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια θα αυξάνεται η θερμοκρασία και ο όγκος, δηλαδή είναι ισοβαρής εκτόνωση. Η μεταβολή ΒΓ είναι ισόχωρη ψύξη γιατί η πίεση είναι ανάλογη της εσωτερικής ενέργειας U άρα και της θερμοκρασίας. Η μεταβολή ΓΑ είναι ισόθερμη συμπίεση γιατί είναι κάθετη στον άξονα της εσωτερικής ενέργειας, άρα θερμοκρασία = σταθ.

β.



γ. $\dfrac{\Delta U_{AB}}{\Delta U_{B\Gamma}} = \dfrac{nC_V(T_B - T_A)}{nC_V(T_A - T_B)} = -1$

δ. Καταστατική εξίσωση στο Α: $P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \Rightarrow P_A = \dfrac{2R \cdot 200}{R \cdot 2} = 2 \cdot 10^5\, N/m^2$

N. Gay-Lussac στην ισοβαρή ΑΒ: $\dfrac{V_A}{T_A} = \dfrac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = 400K$

N. Charles στην ισόχωρη ΒΓ: $\dfrac{P_B}{T_B} = \dfrac{P_\Gamma}{T_\Gamma} \Rightarrow P_\Gamma = 10^5\, N/m^2$.

$\overline{K}_B = \dfrac{3}{2}kT_B$, $\overline{K}_A = \dfrac{3}{2}kT_A$ άρα $\dfrac{\overline{K}_B}{\overline{K}_A} = \dfrac{T_B}{T_A} \Rightarrow \overline{K}_B = 8{,}314 \cdot 10^{-21}\, J$

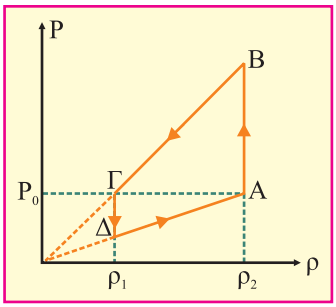
ε. $e = 1 - \dfrac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \dfrac{|Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A}|}{Q_{AB}}$

$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) = \dfrac{2}{R} \cdot \dfrac{5}{2} R \cdot 200 = 1000\, J$

$Q_{B\Gamma} = nC_V(T_\Gamma - T_B) = \dfrac{2}{R} \cdot \dfrac{3}{2} R \cdot (200 - 400) = -600\, J$

$Q_{\Gamma A} = nRT_A \ln\dfrac{V_A}{V_\Gamma} = -400 \ln 2\, J = -280\, J$. Άρα $e = 1 - \dfrac{880\, J}{1000\, J} = 0{,}12$ ή 12%

11. **Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου εκτελεί κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή ΑΒΓΔΑ. Η μεταβολή της πίεσης P του αερίου σε συνάρτηση με την πυκνότητά του ρ φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.**



Για το αέριο δίνεται ο λόγος $\gamma = \dfrac{5}{3}$ και ότι $\rho_2 = 4\rho_1$.

α. Να παρασταθεί η κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα με άξονες P-V (ποιοτικά)

β. Να αποδείξετε ότι: $P_B = 16P_\Delta$

γ. Να αποδείξετε: $\upsilon_{\varepsilon\nu(B)} = 2\upsilon_{\varepsilon\nu(\Delta)}$

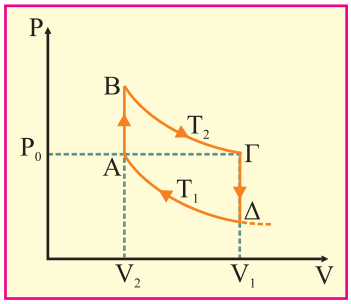
δ. Να υπολογίσετε την απόδοση θερμικής μηχανής που λειτουργεί με τον παραπάνω κύκλο.

Δίνεται: $\ell n2 = 0,7$.

Λύση:

α. Από το διάγραμμα που δίνεται φαίνεται ότι κατά τη μεταβολή ΑΒ η πυκνότητα του αερίου παραμένει σταθερή. Είναι $\rho = \frac{m}{V}$ και $m = \sigma\tau\alpha\theta.$ οπότε προκύπτει ότι και $V = \sigma\tau\alpha\theta.$ δηλαδή η μεταβολή ΑΒ είναι ισόχωρη. Όμοια και η μεταβολή ΓΔ είναι ισόχωρη. Στις μεταβολές ΒΓ και ΔΑ παρατηρούμε ότι η πίεση είναι ανάλογη της πυκνότητας. Από την καταστατική εξίσωση έχουμε ότι:

$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow P = \frac{\rho \cdot R \cdot T}{M}$ από όπου φαίνεται ότι η πίεση είναι ανάλογη της πυκνότητας όταν η απόλυτη θερμοκρασία παραμένει σταθερή δηλαδή οι μεταβολές ΒΓ και ΔΑ είναι ισόθερμες. Έτσι το ζητούμενο διάγραμμα έχει τη μορφή:



β. Από τον νόμο του Boyle για τις ισόθερμες μεταβολές ΒΓ και ΔΑ έχω αντίστοιχα: $P_B \cdot V_2 = P_0 \cdot V_1$ (1) και $P_\Delta \cdot V_1 = P_0 \cdot V_2$ (2). Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει: $\frac{P_B}{P_\Delta} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$ (3).

Για την κατάσταση Β έχω $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$ ενώ για την Δ είναι $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$. Είναι

$\rho_2 = 4\rho_1 \Rightarrow \frac{m}{V_2} = 4\frac{m}{V_1} \Rightarrow V_1 = 4V_2$ οπότε η (3) γίνεται: $\frac{P_B}{P_\Delta} = 16 \Rightarrow P_B = 16P_\Delta$

γ. Για την κατάσταση Α έχουμε $P_0 = \frac{1}{3}\rho_2 \cdot \upsilon^2_{\varepsilon\nu(A)}$ (4) και για την κατάσταση Γ

$P_0 = \frac{1}{3}\rho_1 \cdot \upsilon^2_{\varepsilon\nu(\Gamma)}$ (5). Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$\frac{1}{3}\rho_2 \cdot \upsilon^2_{\varepsilon\nu(A)} = \frac{1}{3}\rho_1 \cdot \upsilon^2_{\varepsilon\nu(\Gamma)} \Rightarrow \upsilon^2_{\varepsilon\nu(\Gamma)} = 4 \cdot \upsilon^2_{\varepsilon\nu(A)} \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon\nu(\Gamma)} = 2 \cdot \upsilon_{\varepsilon\nu(A)}.$$

Επειδή $T_\Gamma = T_B = T_2$ και $T_A = T_\Delta = T_1$ είναι $\upsilon_{\varepsilon\nu(\Gamma)} = \upsilon_{\varepsilon\nu(B)}$ και $\upsilon_{\varepsilon\nu(A)} = \upsilon_{\varepsilon\nu(\Delta)}$.

Έτσι τελικά έχουμε: $\upsilon_{\varepsilon\nu(B)} = 2\upsilon_{\varepsilon\nu(\Delta)}$.

δ. Ισχύει $\upsilon_{\varepsilon\nu(B)} = 2\upsilon_{\varepsilon\nu(\Delta)}$ από όπου έχουμε $\sqrt{\frac{3kT_2}{m}} = 1\sqrt{\frac{3kT_1}{m}} \Rightarrow T_2 = 4T_1$ (6).

Είναι: $Q_{AB} = n \cdot C_V (T_2 - T_1) \Rightarrow Q_{AB} = 3n \cdot C_V \cdot T_1$

$$Q_{B\Gamma} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ell n \frac{V_1}{V_2} = 4nRT_1 \cdot \ell n \frac{4V_2}{V_2} = 8nRT_1 \cdot \ell n2$$

Οπότε $Q_h = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} = 3nC_V \cdot T_1 + 8nRT_1 \cdot \ell n2$

Επίσης: $Q_{\Gamma\Delta} = nC_V (T_1 - T_2) \Rightarrow Q_{\Gamma\Delta} = -3nC_V \cdot T_1$

$$Q_{\Delta A} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ell n \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \cdot \ell n \frac{V_2}{4V_2} = -2nRT_1 \cdot \ell n2$$

Οπότε: $Q_C = Q_{\Gamma\Delta} + Q_{\Delta A} = -3nC_V \cdot T_1 - 2nRT_1 \cdot \ell n2$

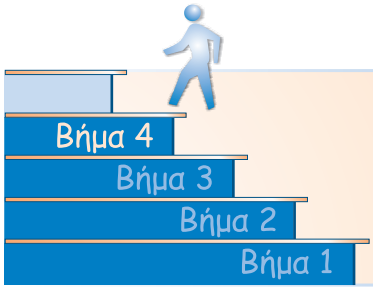
$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \Rightarrow \frac{R}{C_V} = \gamma - 1 \Rightarrow \frac{C_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{\frac{5}{3} - 1} = \frac{3}{2}R$$

Έτσι η απόδοση της μηχανής που λειτουργεί σε αυτό το κύκλο είναι:

$$e = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_h} = 1 - \frac{3nC_V \cdot T_1 + 2nR \cdot T_1 \cdot \ell n2}{3nC_V \cdot T_1 + 8nR \cdot T_1 \cdot \ell n2} = 1 - \frac{3C_V + 2R \cdot \ell n2}{3C_V + 8R \cdot \ell n2}$$

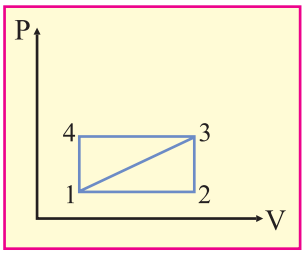
Με $\gamma = \frac{5}{3}$ προκύπτει ότι $C_V = \frac{3}{2}R$ οπότε τελικά έχουμε:

$$e = 1 - \frac{3\frac{3}{2}R + 2R \cdot \ell n2}{3\frac{3}{2}R + 8R \cdot \ell n2} = 1 - \frac{9 + 4 \cdot \ell n2}{9 + 16 \cdot \ell n2} = \frac{12 \cdot \ell n2}{9 + 16 \cdot \ell n2} \approx 0,42$$



Λύνουμε μόνοι μας

1. Ιδανικό αέριο, όταν εκτελεί τη μεταβολή $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ του σχήματος, απορροφά από το περιβάλλον $Q_{143} = 100\,J$ και παράγει έργο $W_{143} = 83,6\,J$. Πόσο έργο παράγει κατά τη μεταβολή $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, αν στην ίδια μεταβολή $Q_{123} = 110\,J$;



.....

.....

.....

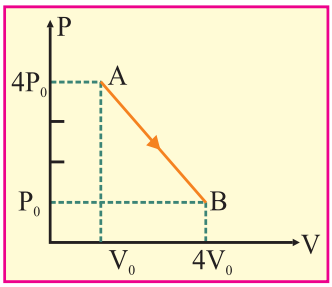
.....

.....

.....

.....

2. Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υφίσταται την αντιστρεπτή μεταβολή ΑΒ που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας, το έργο και τη θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον του, σε συνάρτηση των P και V.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. **Κατά τη θέρμανση ιδανικού αερίου υπό σταθερή πίεση το ποσό θερμότητας Q είναι ίσο με τα 7/2 του παραγόμενου έργου W. Να υπολογιστεί η αδιαβατική σταθερά γ του αερίου.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **Μια ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται στην κατάσταση $A(P_A, V_A, T_A)$ και εκτελεί τις παρακάτω διαδοχικές μεταβολές:**

ΑΒ: ισόθερμη εκτόνωση ώσπου $V_B = 4V_A$.

ΒΓ: αδιαβατική συμπίεση ώσπου $T_\Gamma = 4T_A$.

α. Να παραστήσετε γραφικά τις μεταβολές σε διάγραμμα: $P-V$
β. Για κάθε μεταβολή να υπολογίσετε τα Q, ΔU και W.

Δίνονται P_A, V_A και $\gamma = \frac{5}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. $\frac{2}{R}$ mol He που βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας Α, καταλαμβάνουν όγκο V_A, υπό πίεση $P_A = 2atm$ και θερμοκρασία $T_A = 300K$. Το αέριο συμπιέζεται αντιστρεπτά υπό σταθερή θερμοκρασία, ώσπου να τετραπλασιαστεί η πίεσή του. Αν $R = 8,314$ (S.I.) ζητείται:

α. Να παρασταθεί η μεταβολή σε διάγραμμα $P-V$.

β. Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται πάνω στο αέριο, καθώς και τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας, στην παραπάνω μεταβολή.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. $n = \frac{2}{75R}$ mol ιδανικού αερίου, που βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας Α, καταλαμβάνουν όγκο $V_A = 16L$, υπό πίεση $P_A = 0,5atm$ και θερμοκρασία T_A. Με αδιαβατική συμπίεση ΑΒ, το αέριο αποκτά όγκο $V_B = 2L$.

α. Να υπολογίσετε την αρχική θερμοκρασία του αερίου.

β. Να υπολογίσετε την τελική πίεση και θερμοκρασία του αερίου.

γ. Να παρασταθεί η μεταβολή σε διάγραμμα $P-V$.

δ. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου στη διαδικασία ΑΒ.

Δίνεται: $\gamma = \frac{5}{3}$ και $R = 8,314$ (στο S.I.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Ιδανικό αέριο που καταλαμβάνει όγκο $V_1 = 10L$, εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι να υποδιπλασιαστεί η πίεσή του. Στη συνέχεια συμπιέζεται ισοβαρώς, απορροφώντας το μισό από το έργο που απέδωσε στην ισόθερμη εκτόνωση. Να υπολογιστεί ο τελικός όγκος του αερίου.
Δίνεται: $\ell n2 \simeq 0,7$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

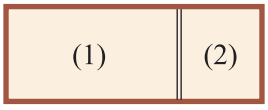
.....

.....

.....

.....

8. Ιδανικό αέριο βρίσκεται στους δύο χώρους του θερμικά μονωμένου δοχείου του σχήματος, που χωρίζονται με λεπτό μονωτικό διάφραγμα. Στον



πρώτο χώρο περιέχονται 4N μόρια του αερίου σε πίεση P, όγκο 2V και θερμοκρασία T_1, ενώ στο δεύτερο χώρο N μόρια του αερίου σε πίεση 4P και όγκο V. Να βρεθεί η θερμοκρασία και η πίεση στο δοχείο όταν ανασύρουμε το διάφραγμα.

.....

.....

.....

.....

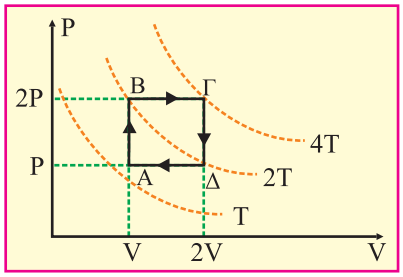
.....

.....

.....

.....

9. $\frac{3}{R}$ mol ιδανικού αερίου εκτελούν τη μεταβολή που παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



α. Να γίνει P – T διάγραμμα της παραπάνω κυκλικής μεταβολής.

β. Να υπολογιστούν οι τιμές των P, V και T για κάθε κατάσταση ισορροπίας, αν $P_A = 1atm$ και $V_A = 0,2m^3$

γ. Να υπολογιστούν το συνολικό έργο που παράγεται σε ένα κύκλο, καθώς και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στη μεταβολή $B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$. Δίνονται: $R = 8,314$ (στο S.I.) και τα P, V.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Ιδανικό μονατομικό αέριο βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α με όγκο V_A και πίεση $P_A = 10^6 \frac{N}{m^2}$. Από την κατάσταση Α, υποβάλλεται διαδοχικά στις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές:

α. Ισοβαρή εκτόνωση μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β με όγκο $V_B = 4V_A$, κατά την οποία το αέριο παράγει έργο $W_{A \to B} = 3 \cdot 10^3\ J$.

β. Αδιαβατική εκτόνωση μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ με όγκο V_Γ και πίεση P_Γ.

γ. Ισόθερμη συμπίεση μέχρι την αρχική κατάσταση Α.

Ζητείται:

Α. Να παραστήσετε (ποιοτικά) τις παραπάνω μεταβολές σε διάγραμμα πίεσης - όγκου ($P - V$).

Β. Να υπολογίσετε την τιμή του όγκου V_A.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή του λόγου $\upsilon_{\varepsilon\nu B} / \upsilon_{\varepsilon\nu \Gamma}$ όπου $\upsilon_{\varepsilon\nu B}$ και $\upsilon_{\varepsilon\nu \Gamma}$ οι ενεργές ταχύτητες των ατόμων του αερίου στις καταστάσεις Β και Γ αντίστοιχα.

Δ. Να υπολογίσετε το ποσό θερμότητας που αποδίδεται από το αέριο στο περιβάλλον κατά την ισόθερμη συμπίεση $\Gamma \to A$, όταν ο συντελεστής απόδοσης θερμικής μηχανής που λειτουργεί διαγράφοντας τον παραπάνω κύκλο είναι $e = 0{,}538$.

Δίνονται: $C_p = \frac{5}{2}R$ και $C_V = \frac{3}{2}R$.

.....

.....

.....

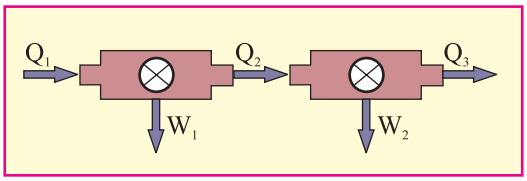
.....

.....

.....

.....

11. Οι θερμικές μηχανές του σχήματος έχουν συντελεστές απόδοσης e_1 και e_2 αντίστοιχα. Ποιος είναι ο συντελεστής απόδοσης του συστήματος των δύο μηχανών;



.....

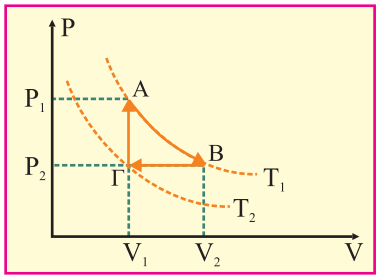
.....

.....

.....

.....

12. **Μια ιδανική θερμική μηχανή λειτουργεί σύμφωνα με τον κύκλο του σχήματος, χρησιμοποιώντας ως μέσο ένα ιδανικό αέριο. Ο κύκλος αποτελείται από μια ισόθερμη εκτόνωση ΑΒ σε θερμοκρασία $T_1 = 600K$ μέχρι διπλασιασμού του όγκου του αερίου, μια ισοβαρή συμπίεση ΒΓ μέχρι τον αρχικό όγκο του αερίου και μια ισόχωρη θέρμανση ΓΑ μέχρι την αρχική κατάσταση του αερίου. Να υπολογίσετε την απόδοση του κύκλου.**



Δίνεται: $\ell n2 = 0,7$ **και** $\gamma = \frac{5}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13. **Ιδανικό αέριο υποβάλλεται στις εξής αντιστρεπτές μεταβολές.**

ΑΒ: ισοβαρή ψύξη μέχρι $T_B = \frac{T_A}{4}$

ΒΓ: αδιαβατική συμπίεση μέχρι $T_\Gamma = T_A$
ΓΑ: ισόθερμη εκτόνωση
α. Να παρασταθεί η κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα $P-V$.

β. Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης αν $C_V = \frac{3}{2}R$, $\ell n2 = 0,7$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

14. Ορισμένη ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α σε θερμοκρασία $T_A = 400K$, πίεση $P_A = 4 \cdot 10^5 N/m^2$ και όγκο $V_A = 10^{-3} m^3$. Από την κατάσταση αυτή το αέριο υποβάλλεται στις παρακάτω διαδοχικές μεταβολές:

α. ισοβαρή θέρμανση ΑΒ, μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β με όγκο $V_B = 2 \cdot 10^{-3} m^3$

β. αδιαβατική ψύξη ΒΓ, μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ με όγκο $V_\Gamma = 3,2 \cdot 10^{-3} m^3$ και πίεση $P_\Gamma = 10^5 N/m^2$.

Α. Να παρασταθούν γραφικά (ποιοτικά) οι παραπάνω μεταβολές σε διάγραμμα $P-V$.

Β. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία του αερίου στην κατάσταση Β.

Γ. Να υπολογιστεί το παραγόμενο έργο κατά την ισοβαρή μεταβολή ΑΒ.

Δ. Να υπολογιστεί η συνολική μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.

Δίνονται: $\gamma = \frac{5}{3}$ και $C_V = \frac{3}{2}R$.

.....
.....
.....

.....

.....

.....

.....

15. Ιδανικό μονοατομικό αέριο εκτελεί κυκλική θερμοδυναμική μεταβολή που αποτελείται από τις εξής αντιστρεπτές μεταβολές:

α. από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας 1, με $P_1 = 3 \cdot 10^5 N/m^2$ και $V_1 = 4 \cdot 10^{-3} m^3$ εκτονώνεται ισοβαρώς στην κατάσταση 2, με $V_2 = 3V_1$,

β. από την κατάσταση 2 ψύχεται ισόχωρα στην κατάσταση 3 και,

γ. από την κατάσταση 3 συμπιέζεται ισόθερμα στην θερμοκρασία T_1, στην αρχική κατάσταση 1.

Αν η ποσότητα του αερίου είναι $n = \frac{3}{R} mol$, όπου R είναι η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων σε $J/(mol \cdot K)$, ζητείται:

Α. Να παρασταθούν γραφικά οι παραπάνω μεταβολές σε διάγραμμα πίεσης - όγκου $(P - V)$.

Β. Να βρεθεί ο λόγος $\left(\frac{\Delta U_{1\to2}}{\Delta U_{2\to3}}\right)$ της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας του αερίου κατά την ισοβαρή εκτόνωση προς τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας κατά την ισόχωρη ψύξη.

Γ. Να βρεθεί ο συντελεστής απόδοσης ιδανικής μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών της παραπάνω κυκλικής μεταβολής.

Δ. Να βρεθεί το ολικό ποσό θερμότητας που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον κατά τη διάρκεια μιας τέτοιας κυκλικής μεταβολής, αν το ποσό του έργου κατά την ισόθερμη συμπίεση του αερίου $W_{3\to1} = -1318\,Joule$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Βήμα 5
Βήμα 4
Βήμα 3
Βήμα 2
Βήμα 1

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α.1. Κατά την ισοβαρή εκτόνωση αερίου για το οποίο $\gamma = \frac{5}{3}$ απορροφάται από το περιβάλλον θερμότητα $Q = 10J$. Το έργο (W) και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας (ΔU) είναι:

α. $W = 6J$, $\Delta U = 4J$,

β. $W = 4J$, $\Delta U = 6J$,

γ. $W = 8J$, $\Delta U = 2J$,

δ. $W = 5J$, $\Delta U = 5J$.

2. Σε ποια μεταβολή στην οποία το αέριο εκτονώνεται έχουμε ψύξη:

α. ισόθερμη

β. αδιαβατική

γ. ισοβαρής

δ. ισόχωρη.

3. Μια άλλη μορφή της καταστατικής εξίσωσης ιδανικού αερίου είναι:

α. $2P \cdot V = 3U$

β. $3P \cdot V = 2U$

γ. $P \cdot V = U$

δ. $P \cdot V = 3U$

4. Αν μία θερμική μηχανή έχει απόδοση ίση με το 50% της απόδοσης μιας μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών, και με $e = \frac{1}{4}$ (της μηχανής) ποιός ο λόγος των θερμοκρασιών μεταξύ των οποίων λειτουργούν οι μηχανές:

α. $\frac{T_c}{T_h} = 1$ **β.** $\frac{T_c}{T_h} = \frac{1}{4}$ **γ.** $\frac{T_c}{T_h} = \frac{1}{2}$ **δ.** $\frac{T_c}{T_h} = \frac{1}{3}$

5. Να αντιστοιχίσετε τις αντιστρεπτές μεταβολές ενός ιδανικού αερίου της στήλης Α με τις σχέσεις της στήλης Β.

Α	**Β**
α. Ισόχωρη	**1.** $\Delta U = -W$
β. Ισοβαρής	**2.** $Q = \Delta U + W$
γ. Αδιαβατική	**3.** $Q = \Delta U$
δ. Κυκλική	**4.** $Q = W$
ε. Τυχαία	

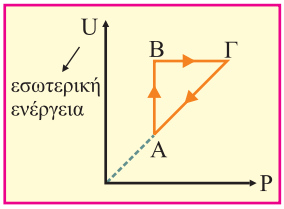
(Μονάδες 25)

Θέμα 2ο

α. Να αποδειχτεί η σχέση $C_P = C_V + R$, όπως επίσης $C_P = \frac{5}{2}R$, $C_V = \frac{3}{2}R$ και $\gamma = \frac{5}{3}$ για ιδανικό μονοατομικό αέριο.

β. Αποδείξτε ότι στον κύκλο Carnot ίσα ποσά θερμότητας μπορεί να παράγουν το ίδιο ή διαφορετικό μηχανικό έργο.

γ. Να παρασταθεί ο κύκλος σε διάγραμμα $P-V$, $V-T$.

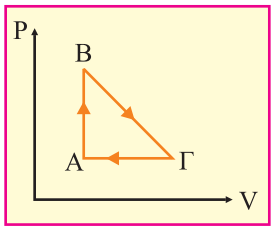


(Μονάδες 25)

Θέμα 3ο

Δίνεται η παρακάτω κυκλική μεταβολή που εκτελεί ιδανικό αέριο.

ΑΒ: ισόχωρη θέρμανση
ΒΓ: εκτόνωση
ΓΑ: ισοβαρής ψύξη



Αν $W_{ΑΒΓΑ} = 300J$ και $W_{ΓΑ} = -200J$. Να βρείτε:

α. τη θερμότητα Q_{AB} **β.** το έργο $W_{BΓ}$ **γ.** το λόγο $\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta U_{ΓA}}$.

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο

Μια ποσότητα ιδανικού αερίου $\left(P_A = 4\cdot 10^5\ N/m^2, V_A = 5\cdot 10^{-3} m^3\right)$ πραγματοποιεί μια κυκλική μεταβολή που αποτελείται από τις παρακάτω επιμέρους αντιστρεπτές μεταβολές:

ΑΒ: ισόχωρη θέρμανση $\left(P_B = 2P_A\right)$

ΒΓ: ισόθερμη εκτόνωση

ΓΑ: ισοβαρής ψύξη.

Δίνονται: $\ell n2 = 0,7$ και $\gamma = \frac{5}{3}$

α. Να αποδοθεί η κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα P-V.

β. Να βρεθούν η πίεση, ο όγκος και η εσωτερική ενέργεια του αερίου σε καθεμία από τις καταστάσεις ισορροπίας Α, Β, Γ.

γ. Να υπολογιστεί η ενέργεια που ανταλλάσει το αέριο με το περιβάλλον του σε κάθε μεταβολή.

δ. Να υπολογιστεί η απόδοση του κύκλου.

(Μονάδες 25)

Κεφάλαιο 3ο

Κίνηση φορτίου σε ηλεκτρικό πεδίο

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο κίνηση φορτίου σε ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Πως ορίζεται η ένταση ηλεκτροστατικού πεδίου και με τι ισούται η ένταση πεδίου Coulomb.
- ✓ Τη σχέση έντασης και διαφοράς δυναμικού στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.
- ✓ Η ένταση προστίθεται διανυσματικά σε αντίθεση με το δυναμικό που προστίθεται αλγεβρικά.
- ✓ Η δυναμική ενέργεια φορτίων αναφέρεται σε σύστημα φορτίων και όχι σε ένα μεμονωμένο φορτίο.
- ✓ Η δυναμική ενέργεια μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. ($Q \cdot q > 0$ τότε $U > 0$, $Q \cdot q < 0$ τότε $U < 0$ για σύστημα δύο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων).
- ✓ Ποια είναι η φυσική σημασία του προσήμου της δυναμικής ενέργειας.
- ✓ Όταν έχουμε σύστημα πολλών ηλεκτρικών σημειακών φορτίων τότε η δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών όλων των δυνατών ζευγαριών των φορτίων.
- ✓ Πως να εφαρμόζει αρχή διατήρησης ενέργειας για σύστημα φορτίων.
- ✓ Όταν έχουμε κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μπορούμε να εφαρμόζουμε και Θ.Μ.Κ.Ε. (Συνιστάται σε ομογενές Η.Π).
- ✓ Όταν έχουμε δύο απομονωμένα φορτία που μπορούν να κινηθούν μόνο με την επίδραση της μεταξύ τους ασκούμενης δύναμης τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε αρχή διατήρησης ορμής.
- ✓ Αν το φορτίο είναι θετικό και αφεθεί σε ομογενές πεδίο τότε η δύναμη έχει την ίδια φορά με την ένταση ενώ αν είναι αρνητικό αντίθετη.

- ✓ Αν δεν δίνεται το g ή ζητείται τότε θα θεωρούμε τις δυνάμεις βαρύτητας αμελητέες.
- ✓ Σε κάθε κίνηση ποιες εξισώσεις ισχύουν και πως εφαρμόζονται.

Κίνηση φορτίου σε ηλεκτρικό πεδίο: Τύποι - Βασικές έννοιες

- Δυναμική ενέργεια συστήματος δύο σημειακών φορτίων $U = K_c \frac{Q_1 Q_2}{r}$
- Χωρητικότητα πυκνωτή :

  Ορισμός $C = \frac{Q}{V}$ επίπεδος πυκνωτής $C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{\ell}$ όπου S, ℓ εμβαδόν και απόσταση οπλισμών.
- Ένταση και διαφορά δυναμικού στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $E = \frac{V}{\ell}$
- Δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη στο Ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή

  $U = \frac{1}{2} CV^2$
- Εξισώσεις κίνησης φορτίου που μπαίνει σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές.

xx΄	yy΄
$F_x = 0$	$F_y = E \cdot q$
$\alpha_x = 0$	$\alpha_y = \frac{E \cdot q}{m}$
$\upsilon_x = \upsilon_0$	$\upsilon_y = \alpha_y \cdot t$
$x = \upsilon_0 \cdot t$	$y = \frac{1}{2} \alpha_y \cdot t^2$

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Σχέση έργου-μεταβολής δυναμικής ενέργειας.**

Απόδειξη

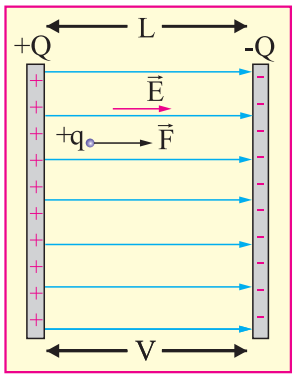
Το έργο που παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο κατά τη μετακίνηση ενός σημειακού φορτίου q από ένα σημείο Α με δυναμικό V_A, σε ένα άλλο σημείο Γ με δυναμικό V_Γ, δίνεται από τη σχέση $W_{A\to\Gamma} = q \cdot V_{A\Gamma} = q \cdot (V_A - V_\Gamma)$

→ Αν $W_{A\to\Gamma} > 0$ τότε το πεδίο παράγει έργο και η δυναμική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται.

→ Αν $W_{A\to\Gamma} < 0$ τότε το πεδίο καταναλώνει έργο και η δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Να αποδείξετε τη σχέση μέτρου έντασης και διαφοράς δυναμικού σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.**

Απόδειξη



Έστω ένα δοκιμαστικό φορτίο +q αφήνεται πολύ κοντά στον θετικά φορτισμένο οπλισμό επίπεδου πυκνωτή. Λόγω του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, το φορτίο δέχεται δύναμη $F = E \cdot q$ (1) και μετακινείται μέχρι τον αρνητικά φορτισμένο οπλισμό.

Κατά τη μετακίνηση αυτή η δύναμη του πεδίου παράγει έργο $W = F \cdot L$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $W = E \cdot q \cdot L$ (3).

Το έργο όμως γνωρίζουμε ότι μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $W = q \cdot V$ (4)

Επομένως από (3), (4) έχουμε $E \cdot q \cdot L = q \cdot V$, άρα $E = \dfrac{V}{L}$

ΘΕΩΡΙΑ 3 Δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων

Απόδειξη

Σχηματισμός - Διάλυση συστήματος φορτίων

Όταν δυο ή περισσότερα φορτία είναι τοποθετημένα σε τέτοιες θέσεις ώστε να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, αποτελούν ένα **σύστημα**.

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια που απαιτείται για το σχηματισμό (κατασκευή) του συστήματος ή για τη διάλυση (καταστροφή) του συστήματος θα χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλ:

$$E_{\text{αρχ,συστ}} + E_{\text{προσφ}} = E_{\text{τελ,συστ}}$$

Υπολογισμός δυναμικής ενέργειας συστήματος φορτίων

Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων είναι ίση με το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά των φορτίων από πολύ μεγάλη απόσταση μέχρι να τοποθετηθούν στη θέση τους. Αυτή υπολογίζεται με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης όλων των φορτίων ανά δύο. Προσθέτοντας τις επιμέρους δυναμικές ενέργειες βρίσκουμε την ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

2ος τρόπος: μεταφέρουμε ένα-ένα τα φορτία στις θέσεις τους και υπολογίζουμε το έργο που απαιτείται κάθε φορά που φέρνουμε ένα φορτίο. Προσθέτουμε τα επιμέρους έργα και το συνολικό έργο είναι ίσο με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Παράδειγμα

Τρία όμοια φορτία Q βρίσκονται στις τρεις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α. Να υπολογιστεί:

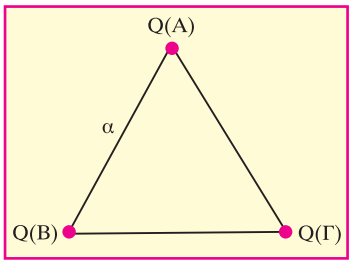
α. η δυναμική ενέργεια του συστήματος,

β. η ενέργεια που απαιτείται για τη δημιουργία του συστήματος των τριών φορτίων.

Απάντηση

α. 1ος τρόπος

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:



$$U_{\text{Συστ}} = U_{A,B} + U_{B,\Gamma} + U_{\Gamma,A}$$

$$U_{\text{Συστ.}} = k\frac{Q_A Q_B}{\alpha} + k\frac{Q_B Q_\Gamma}{\alpha} + k\frac{Q_\Gamma Q_A}{\alpha} \Rightarrow$$

$$U_{\text{Συστ.}} = 3k\frac{Q^2}{\alpha}.$$

2ος τρόπος

Το πρώτο φορτίο Q μπορεί να μεταφερθεί στο Α χωρίς δαπάνη έργου. Στη συνέχεια μεταφέρουμε το δεύτερο φορτίο Q στο σημείο Β προσφέροντας ενέργεια: $W_1 = -W_{\infty\to B} = W_{B\to\infty} = Q.k\frac{Q}{\alpha} = k\frac{Q^2}{\alpha}$

Μεταφέρουμε το τρίτο φορτίο Q στο Γ.

$W_2 = -W_{\infty\to\Gamma} = W_{\Gamma\to\infty} = Q\cdot V_\Gamma$.

Όμως $V_\Gamma = V_A + V_B = k\frac{Q}{\alpha} + k\frac{Q}{\alpha} = 2k\frac{Q}{\alpha}$. Άρα: $W_2 = -W_{\infty\to\Gamma} = 2k\frac{Q^2}{\alpha}$.

Το συνολικό έργο είναι: $W = W_1 + W_2 = k\frac{Q^2}{\alpha} + 2k\frac{Q^2}{\alpha} = 3k\frac{Q^2}{\alpha}$

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι: $U_{\Sigma\upsilon\sigma\tau.} = 3k\frac{Q^2}{\alpha}$.

Σημείωση: Η δυναμική ενέργεια που υπολογίσαμε ανήκει στο σύστημα των φορτίων.

β. $E_{\alpha\rho\chi,\sigma\upsilon\sigma\tau} + E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = E_{\tau\varepsilon\lambda,\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow U_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\infty} + E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = U_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = 3k\frac{Q^2}{\alpha} \Rightarrow E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = 3k\frac{Q^2}{\alpha}$

ΘΕΩΡΙΑ 4 Κίνηση σημειακού ηλεκτρικού φορτίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

i. Παράλληλα στις δυναμικές γραμμές

Εξισώσεις κίνησης: $\alpha = \frac{E\cdot q}{m}$, $\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha\cdot t$,

$$y = \upsilon_0\cdot t \pm \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$$

ii. Κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου

Απόδειξη

ii. Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο +q επιταχύνεται από ηλεκτρικό πεδίο τάσης V_0 και αποκτά ταχύτητα υ_0. Στην συνέχεια εισέρχεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές. Το πεδίο αυτό δημιουργείται από δύο οριζόντιες μεταλλικές πλάκες μήκους L. Η απόσταση ανάμεσα στις

πλάκες είναι d και μεταξύ τους υπάρχει διαφορά δυναμικού V.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_0 που αποκτά αρχικά το σωματίδιο.

β. Να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης και να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.

γ. Να υπολογίσετε τον ολικό χρόνο κίνησης του σωματιδίου στο πεδίο.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς της κίνησης του.

ε. Να βρείτε την κατακόρυφη απόκλιση ανάμεσα στα σημεία εισόδου - εξόδου.

στ. Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία εισόδου - εξόδου.

ζ. Να υπολογιστεί η απόσταση S ανάμεσα στα σημεία εισόδου εξόδου.

η. Να βρεθεί η διεύθυνση της ταχύτητας κατά την έξοδό της από το πεδίο.

θ. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας εξόδου από το πεδίο από το πεδίο εάν:

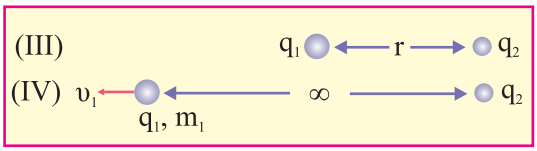
i. είναι γνωστός ο ολικός χρόνος κίνησης,

ii. είναι γνωστή η κάθετη απόκλιση $y_{ολ}$ και

iii. είναι γνωστή η διαφορά δυναμικού $V_{y,ολ}$ για αυτή την απόκλιση.

ι. Να υπολογιστεί το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου από τη στιγμή της εισόδου του στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέχρι τη στιγμή της εξόδου του από αυτό.

Θεωρούμε αμελητέο το βάρος του σωματιδίου.



Απάντηση:

α. Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κίνηση του σωματιδίου στο αρχικό πεδίο.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = qV_0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - 0 = qV_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

β. Στο σωματίδιο ασκείται μια ηλεκτρική δύναμη παράλληλη στις δυναμικές γραμμές με φορά προς τα πάνω. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων αναλύω την κίνηση σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις. Μια ευθύγραμμη ομαλή στον άξονα x΄x με ταχύτητα υ_0 και μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη στον y΄y χωρίς αρχική ταχύτητα

xx΄	yy΄
$F_x = 0$	$F_y = E \cdot \lvert q \rvert$
$\alpha_x = 0$	$\alpha_y = \frac{E \cdot \lvert q \rvert}{m} = \frac{qV}{md}$
$\upsilon_x = \upsilon_0$	$\upsilon_y = \alpha_y \cdot t \ (3)$
$x = \upsilon_0 \cdot t \ (2)$	$y = \frac{1}{2}\alpha_y \cdot t^2 \ (1)$

γ. Μόλις βγει από το πεδίο στον x΄x έχει διανύσει απόσταση $x = L$.

Συνεπώς από $(2) \Rightarrow L = \upsilon_0 \cdot t_{o\lambda} \Rightarrow t_{o\lambda} = \frac{L}{\upsilon_0} \ (4)$

δ. Εξίσωση τροχιάς είναι μια εξίσωση που συνδέει τις απομακρύνσεις x και y. Προκύπτει από τις σχέσεις (2) και (1) με απαλοιφή χρόνου.

$(2) \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon_0}$ και τότε από $(1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\alpha\frac{x^2}{\upsilon_0^2} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{2\upsilon_0^2}x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot\frac{qV}{md}\cdot\frac{x^2}{\upsilon_0^2}$

ε. Από τις σχέσεις (1) και (4) για $t = t_{o\lambda} = \frac{L}{\upsilon_0}$ έχουμε:

$y_{o\lambda} = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_{o\lambda}{}^2 \Rightarrow y_{o\lambda} = \frac{1}{2}\cdot\frac{qV}{md}\cdot\frac{L^2}{\upsilon_0^2} \ (5)$ ή από την (5) για

$x = L \Rightarrow y_{o\lambda} = \frac{1}{2}\cdot\frac{qV}{md}\cdot\frac{L^2}{\upsilon_0^2}$

στ. $E = \frac{V_{y_{o\lambda}}}{y_{o\lambda}} \Rightarrow V_{y,o\lambda} = E \cdot y_{o\lambda}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (5) $\Rightarrow$

$V_{y,o\lambda} = \frac{V}{d}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{qV}{md}\cdot\frac{L^2}{\upsilon_0^2} \Rightarrow V_{y,o\lambda} = \frac{qV^2L^2}{2md^2\upsilon_0^2} \ (6)$

ζ. Απόσταση S είναι η ευθεία που ενώνει το σημείο εισόδου O με το σημείο εξόδου A. Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο ισχύει:

$S^2 = L^2 + y_{o\lambda}^2 \Rightarrow S\sqrt{L^2 + y_{o\lambda}^2}$ και λόγω (5) $S = \sqrt{L^2 + \frac{q^2V^2L^4}{4m^2d^2\upsilon_0^4}}$.

η. Στο σημείο εξόδου $\upsilon_x = \upsilon_0$ και $\upsilon_y = \alpha \cdot t_{ολ} \Rightarrow \upsilon_y = \frac{qV}{md} \cdot \frac{L}{\upsilon_0}$.

Άρα για τη διεύθυνση της ταχύτητας εξόδου θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{qVL}{md\upsilon_0}}{\upsilon_0} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{qVL}{md\upsilon_0^2}.$$

θ. i. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \Rightarrow \sqrt{\upsilon_0^2 + \alpha^2 t_{ολ}^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{q^2V^2}{m^2d^2} \cdot \frac{L^2}{\upsilon_0^2}}$.

ii. Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κίνηση του φορτίου ανάμεσα στα σημεία εισόδου - εξόδου.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = F \cdot y_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = qEy_{ολ} \Rightarrow$$

$$m\upsilon^2 - m\upsilon_0^2 = 2q\frac{V}{d}y_{ολ} \Rightarrow \upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2\frac{qV}{md}y_{ολ} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2qV}{md}y_{ολ}}$$

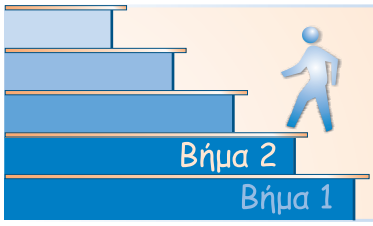
iii. Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κίνηση του φορτίου ανάμεσα στα σημεία εισόδου - εξόδου.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = q \cdot V_{y_{ολ}}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = qV_{y,ολ} \Rightarrow m\upsilon^2 - m\upsilon_0^2 = 2qV_{y,ολ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 - \upsilon_0^2 = \frac{2qV_{y,ολ}}{m} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2qV_{y,ολ}}{m}}$$

ι. Ισχύει $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \Delta P = F\Delta t \Rightarrow \Delta P = qE\frac{L}{\upsilon_0} \Rightarrow \Delta P = q\frac{V}{d}\frac{L}{\upsilon_0}$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 126 - 127: Ερωτήσεις 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22

σ. 138: Ασκήσεις 3.90, 3.91, 3.92, 3.93

σ. 139: Ασκήσεις 3.94, 3.95, 3.97

σ. 140: Ασκήσεις 3.98, 3.99, 3.100

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

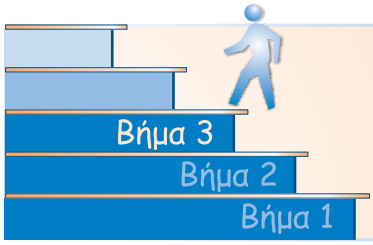
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

σ.σ. 89 - 102: Τα παραδείγματα 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.9, 3.10, 3.12

σ. 109: Ξεχωριστό θέμα 1 (διόρθωση στην απάντηση του β ερωτήματος:

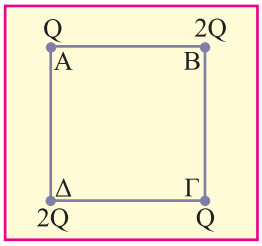
$$x = \frac{K_c \cdot q^2}{6m\upsilon_0^2})$$

σ.σ. 105 - 108: Ασκήσεις 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.10, 3.12



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Στις κορυφές ΑΒΓΔ τετραγώνου πλευράς $\alpha = 0,36cm$ βρίσκονται αντίστοιχα τοποθετημένα τα φορτία Q, 2Q, Q και 2Q με $Q = 2\mu C$.**



α. Υπολογίστε τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τεσσάρων φορτίων.

β. Αφήνουμε το φορτίο Q της κορυφής Γ ελεύθερο να κινηθεί. Αν η μάζα του είναι $m = 2g$, υπολογίστε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει.

Δίνεται: $K_c = 9 \cdot 10^9$ (στο SI). Βαρυτικά πεδία αμελητέα.

Λύση:

α. Είναι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 3,6 \cdot 10^{-3} m$ ενώ $A\Gamma = B\Delta = \alpha\sqrt{2} = 3,6 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3}\, m$.
Η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = 4 \cdot K_c \frac{Q \cdot 2Q}{\alpha} + K_c \frac{Q^2}{\alpha\sqrt{2}} + K_c \frac{4Q^2}{\alpha\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow U = \frac{8K_cQ^2}{\alpha} + \frac{5K_cQ^2}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{K_cQ^2}{\alpha} \cdot \left(8 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{3,6 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(8 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) J$$

$$= 10 \cdot \left(8 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) J$$

β. Το φορτίο θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα στο άπειρο, όπου όλη η αρχική δυναμική του ενέργεια θα έχει μετατραπεί σε κινητική.

$$\text{Α.Δ.Ε:}\ U_{\alpha\rho\chi}^{(\Gamma)} = K_{\tau\varepsilon\lambda}^{(\infty)} \Rightarrow K_c \frac{2Q^2}{\alpha} + K_c \frac{2Q^2}{\alpha} + K_c \frac{2Q^2}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{2K_cQ^2}{m\alpha} \cdot \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \upsilon = 100\sqrt{4 + \sqrt{2}/2}\, m/s \simeq 217 m/s$$

2. **Ένα σύστημα αποτελείται από ένα ακλόνητο φορτίο $Q = 20\mu C$ και ένα φορτίο $q = 1\mu C$ μάζας $m = 4g$ το οποίο μπορεί να κινηθεί. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $U = 3,6\,J$.**

α. Υπολογίστε την απόσταση των δύο φορτίων.

β. Αφήνουμε το q ελεύθερο να κινηθεί. Περιγράψτε το είδος της κίνησής του και βρείτε την ταχύτητα του όταν η απόσταση των φορτίων διπλασιαστεί.

γ. Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα του φορτίου q.

Δίνεται: $K_c = 9 \cdot 10^9$ (στο SI)

Λύση:

α. Είναι $U = K_c \dfrac{Qq}{r} \Rightarrow r = \dfrac{K_c Qq}{U} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{3,6} m = 5 \cdot 10^{-2} m$

β. Το φορτίο q απομακρυνόμενο θα απωθείται με διαρκώς μικρότερη δύναμη Coulomb. Η κίνησή του θα είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που συνεχώς μειώνεται. Η ταχύτητά του θα αυξάνεται με όλο και πιο αργό ρυθμό, και τελικά θα αποκτήσει (σε άπειρη απόσταση) σταθερή τιμή.

ΑΔΕ από r έως 2r: $E_{ΑΡΧ} = E_{ΤΕΛ} \Rightarrow U_{ΑΡΧ} = U_{ΤΕΛ} + \dfrac{1}{2} m\upsilon^2$

$$\Rightarrow K_c \frac{Qq}{r} = K_c \frac{Qq}{2r} + \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{K_c Qq}{mr}} = 30 m/s$$

γ. Η ταχύτητα γίνεται μέγιστη σε άπειρη απόσταση. ΑΔΕ από r μέχρι το άπειρο:

$$E_{ΑΡΧ} = E_{ΤΕΛ} \Rightarrow \frac{K_c Qq}{r} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2K_c Qq}{mr}} = 30\sqrt{2}\, m/s$$

3. **Δύο φορτία $q_1 = 10^{-9} C$ και $q_2 = 4 \cdot 10^{-9} C$ συγκρατούνται ακίνητα σε τέτοιες θέσεις ώστε η μεταξύ τους απόσταση να είναι $r = 20cm$. Αν το q_1 παραμείνει ακίνητο και το q_2 αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί, θα φτάσει στο άπειρο με ταχύτητα $\upsilon_2 = 2 \cdot 10^{-2} m/s$. Αν αφηνόταν το q_1 ελεύθερο συγκρατώντας το q_2, αυτό θα έφτανε στο άπειρο με $\upsilon_1 = 6 \cdot 10^{-2} m/s$. Τέλος κάνοντας το ίδιο πείραμα αφήνουμε και τα δύο ελεύθερα να κινηθούν ώστε να φτάσουν στο άπειρο.**

α. Ποια η αρχική δυναμική ενέργεια του συστήματος;

β. Ποιες οι μάζες m_1, m_2;

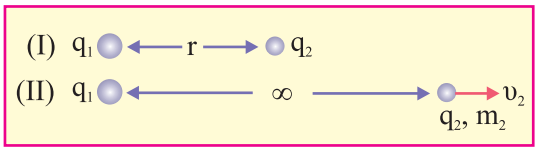
γ. Ποιες ταχύτητες αποκτούν όταν αφήνονται και τα δύο φορτία ελεύθερα;

Λύση:

α. Η αρχική δυναμική ενέργεια είναι:

$$U = K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-1}} J \Rightarrow U = 18 \cdot 10^{-8} J$$

β.1.

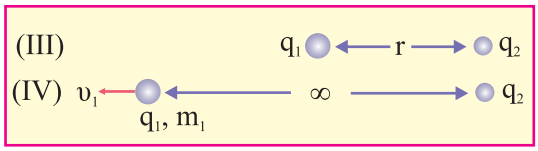


Με διατήρηση ενέργειας ανάμεσα στις θέσεις I και II παίρνω

$$E_I = E_{II} \Rightarrow K_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow m_2 = \frac{2K_c q_1 \cdot q_2}{\upsilon_2^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$m_2 = \frac{36 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-4}} kg = 9 \cdot 10^{-4} kg .$$

β.2.



Ομοίως με διατήρηση ενέργειας ανάμεσα στις θέσεις III και IV έχω

$$E_{III} = E_{IV} \Rightarrow K_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$m_1 = \frac{2K_c q_1 \cdot q_2}{\upsilon_1^2 \cdot r} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 10^{-8}}{\left(6 \cdot 10^{-2}\right)^2} kg = \frac{36 \cdot 10^{-8}}{36 \cdot 10^{-4}} kg \Rightarrow m_1 = 10^{-4} kg$$

γ. Τώρα που κινούνται και τα δύο εφαρμόζω αρχές διατήρησης ενέργειας και διατήρησης ορμής. (Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα).

Α.Δ.Ο: $\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$$\upsilon_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = 9 \cdot \upsilon_2 \quad (1)$$

$$\text{Α.Δ.Ε: } E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$K_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 \cdot 81\upsilon_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2$$

$$\text{και επειδή } m_1 = \frac{m_2}{9} \Rightarrow K_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = \frac{1}{2} m_2 \cdot 9\upsilon_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$K_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = 5m_2 \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{5m_2} \cdot \frac{K_c \cdot q_1 \cdot q_2}{r}} \Rightarrow$$

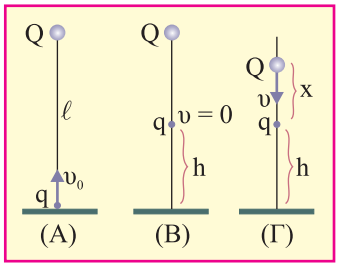
$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-18}}{5 \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-1}}} m/s = \sqrt{0,4} \cdot 10^{-2} m/s$$

και από την (1): $\upsilon_1 = 9\sqrt{0,4} \cdot 10^{-2} m/s$

4. Σε ύψος $\ell = 8m$ βρίσκεται ακλόνητα τοποθετημένο ένα φορτίο $Q = 2\mu C$ μάζας $M = 200g$. Στην ίδια κατεύθυνση με το Q εκτοξεύουμε από το έδαφος κατακόρυφα ένα δεύτερο φορτίο $q = 1mC$ μάζας $m = 20g$ με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 5m/s$.

α. Βρείτε το μέγιστο ύψος h στο οποίο θα φτάσει το φορτίο q.

β. Τη στιγμή που το q βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του το ακινητοποιούμε και ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερο το Q να κινηθεί. Να υπολογίσετε την μέγιστη ταχύτητα του.



Δίνονται: $g = 10m/s^2$ και $K_c = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

Λύση:

α. Τη στιγμή που το q βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του, θα είναι στιγμιαία ακίνητο (φάση Β). ΑΔΕ για το q από (Α) σε (Β) :

$$U_{H\Lambda,A} + K_A = U_{H\Lambda,B} + U_{BAP,B} \Rightarrow K_c \frac{Qq}{\ell} + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = K_c \frac{Qq}{\ell - h} + mgh \text{ με } h < \ell$$

$$\Rightarrow \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-3}}{8} + \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^{-3}\cdot 25 = \frac{18}{8-h} + 0,2h \text{ (h σε m)}$$

$$\Rightarrow 2h^2 - 41h + 20 = 0 \Rightarrow h = \begin{cases} 20m \text{ απορρ. γιατί } 20\,m > \ell = 8m \\ 0,5m \text{ δεκτή} \end{cases}$$

β. Στη φάση (Β) το Q δέχεται από το q απωστική δύναμη

$F_{H\Lambda} = K_c \dfrac{Q\cdot q}{(\ell - h)^2} = \dfrac{18}{7,5^2}N$ ενώ το βάρος του είναι $B = Mg = 2N$. Προφανώς

$B > F_{H\Lambda}$ επομένως αφήνοντας το Q ελεύθερο, αυτό θα κινηθεί προς τα κάτω. Η ταχύτητά του θα γίνει μέγιστη τη στιγμή που θα απέχει από το q απόσταση x τέτοια ώστε $F_{H\Lambda} = B$ (φάση Γ) άρα: $K_c \dfrac{Qq}{x^2} = Mg \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{K_c Qq}{Mg}} = 3m$

ΑΔΕ για το Q από το (Β) σε (Γ): $U_{H\Lambda,B} + U_{BAP,B} = U_{H\Lambda,\Gamma} + U_{BAP,\Gamma} + K_\Gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow K_c \frac{Qq}{\ell - h} + Mg\ell = K_c \frac{Qq}{x} + Mg(h + x) + \frac{1}{2}M\upsilon_{max}^2$$

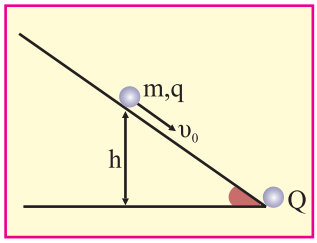
$$\Rightarrow \frac{18}{7,5} + 16 = 6 + 2\cdot 3,5 + 0,1\upsilon^2 \Rightarrow 5,4 = 0,1\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{54}\,m/s = 3\sqrt{6}\,m/s$$

5. Στη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης 30° βρίσκεται ακλόνητα τοποθετημένο ένα φορτίο $Q = 2\cdot 10^{-4}C$. Από ένα σημείο του επιπέδου το οποίο βρίσκεται σε ύψος $h = 6m$ εκτοξεύουμε προς το Q ένα φορτίο $q = 10^{-4}C$ μάζας $m = 50g$ με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 40m/s$. Να υπολογιστεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των δύο φορτίων. Δίνονται $g = 10m/s^2$ και $K_c = 9\cdot 10^9$ (SI).

Λύση:

Είτε τα φορτία βρίσκονται σε ελάχιστη είτε σε μέγιστη απόσταση, το q θα είναι στιγμιαία ακίνητο. Θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για το q από το αρχικό σημείο του σχήματος μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του, σε απόσταση r από το Q.

Παρατηρείστε ότι η αρχική απόσταση των φορτίων είναι 2h γιατί $\varphi = 30^o$.



$$K_{ΑΡΧ} + U_{ΒΑΡ}^{ΑΡΧ} + U_{ΗΛ}^{ΑΡΧ} = U_{ΒΑΡ}^{ΤΕΛ} + U_{ΗΛ}^{ΤΕΛ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{K_c Qq}{2h} + mgh = mg\frac{r}{2} + \frac{K_c Qq}{r}$$

$$\Rightarrow 40 + 15 + 3 = \frac{r}{4} + \frac{180}{r} \quad (r \text{ σε } m)$$

$$\Rightarrow r^2 - 232r + 720 = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 228{,}85m \\ 3{,}15m \end{cases}$$

Επομένως $r_{min} = 3{,}15\,m$ και $r_{max} = 228{,}85\,m$.

6. Ανάμεσα σε δύο αντίθετα φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση $d = 10cm$ και η διαφορά δυναμικού τους είναι $V = 100\,Volt$, τοποθετώ χωρίς αρχική ταχύτητα φορτίο $q = 5\mu C$ σε σημείο Α πολύ κοντά στη θετική πλάκα.

Α. Πόση επιτάχυνση θα αποκτήσει;

Β. Σε πόσο χρόνο θα συναντήσει την αρνητική πλάκα;

Γ. Το ίδιο φορτίο εισέρχεται από μικρή οπή της αρνητικής πλάκας με ταχύτητα υ_0 παράλληλη στις δυναμικές γραμμές.

α. Ποια η υ_0 ώστε μόλις να φτάσει στη θετική;

β. με τι ταχύτητα επιστρέφει στο σημείο εισόδου;

Δίνεται: $m = 10^{-11}kg$.

Λύση:

Α. Η ένταση του Ο.Η.Π. που δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες ισούται με:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10^2}{10^{-1}}\frac{V}{m} \text{ ή } E = 10^3 V/m$$

Η επιτάχυνση που αποκτά το φορτίο σ'αυτό το πεδίο ισούται με

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-11}} \cdot 10^3 m/s^2 \Rightarrow \alpha = 5 \cdot 10^8 m/s^2$$

Παρατηρούμε πως $\alpha \gg g$ γι'αυτό και το βαρυτικό πεδίο αγνοείται.

Β. Η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα.

$$d=\frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2d}{\alpha}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-1}}{5\cdot 10^{8}}}s=\sqrt{4\cdot 10^{-10}}s \Rightarrow t=2\cdot 10^{-5}s$$

Γ. Η κίνηση τώρα είναι ομαλά επιβραδυνόμενη γιατί ταχύτητα και δύναμη έχουν αντίθετες φορές.

α. $\upsilon=\upsilon_0-\alpha t \Rightarrow 0=\upsilon_0-\alpha t \Rightarrow \upsilon_0=\alpha t \Rightarrow t=\frac{\upsilon_0}{\alpha}$

$$d=\upsilon_0\cdot t-\frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow d=\frac{\upsilon_0^2}{\alpha}-\frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$d=\frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \upsilon_0=\sqrt{2\cdot\alpha\cdot d} \Rightarrow \upsilon_0=\sqrt{2\cdot 5\cdot 10^{8}\cdot 10^{-1}}m/s=10^4 m/s$$

ενώ ο χρόνος είναι $t=\frac{\upsilon_0}{\alpha}=\frac{10^4}{5\cdot 10^8}s=2\cdot 10^{-5}s$.

β. Για να επιστρέψει πρέπει η συνολική του μετατόπιση να είναι μηδέν:

$$y=0 \Rightarrow \upsilon_0\cdot t-\frac{1}{2}\alpha t^2=0 \Rightarrow t=\frac{2\upsilon_0}{\alpha}$$

$\upsilon=\upsilon_0-\alpha t \Rightarrow \upsilon=-\upsilon_0$ δηλαδή κατά μέτρο ίση με την αρχική αλλά αντίθετης φοράς (αποδεικνύεται και με τη διατήρηση ενέργειας).

7. Ηλεκτρόνιο με $|q|=1,6\cdot 10^{-19}C$ και $m=9\cdot 10^{-31}kg$ εισέρχεται σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο παράλληλα προς τους οπλισμούς πυκνωτή μήκους $L=10cm$ και έντασης $E=10^4\frac{N}{C}$. Σε απόσταση $S=10cm$ υπάρχει φθορίζουσα οθόνη. Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται με ταχύτητα υ_0 και εξέρχεται με ταχύτητα $\upsilon_0\sqrt{2}$. Μετά την κίνησή του στον πυκνωτή συνεχίζει και πέφτει στο σημείο Δ της οθόνης. Να υπολογίσετε:

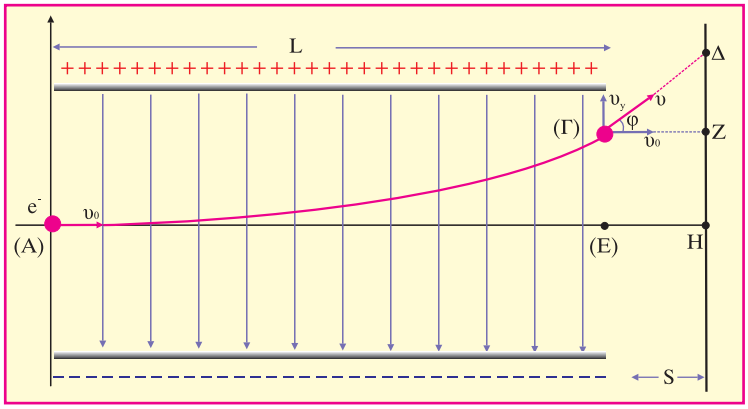
α. την διαφορά δυναμικού ΓΑ

β. την μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανάμεσα στα σημεία Α, Γ

γ. το μέτρο της μεταβολής της ορμής ΔΡ ανάμεσα στα σημεία Α, Γ και τον ρυθμό μεταβολής της ορμής

δ. την εκτροπή ΗΔ του ηλεκτρονίου.

Λύση:



Μέσα στο ομογενές Η.Π. το ηλεκτρόνιο διαγράφει σύνθετη κίνηση.
Εξισώσεις κίνησης:

xx΄	yy΄
$F_x = 0$	$F_y = E \cdot \lvert q \rvert$
$\alpha_x = 0$	$\alpha_y = \dfrac{E \cdot \lvert q \rvert}{m}$
$\upsilon_x = \upsilon_0$	$\upsilon_y = \alpha_y \cdot t$
$x = \upsilon_0 \cdot t$	$y = \dfrac{1}{2}\alpha_y \cdot t^2$

α. Επειδή $\upsilon = \upsilon_0\sqrt{2}$ το $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon} = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_0\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\varphi = 45^o$. Όταν εξέλθει

από το Η.Π. τότε: $\left.\begin{array}{l} x = L \\ x = \upsilon_0 t \end{array}\right\} t = \dfrac{L}{\upsilon_0}$

Όμως $\left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi 45^o = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_0} = \dfrac{\frac{E\lvert q\rvert}{m}\cdot t}{\upsilon_0} = \dfrac{E\lvert q\rvert L}{m\upsilon_0^2} \\ \varepsilon\varphi 45^o = 1 \end{array}\right\} \dfrac{E\lvert q\rvert L}{m\upsilon_0^2} = 1 \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{E\lvert q\rvert L}{m}} = \dfrac{4}{3}\cdot 10^7\, m/s$

Άρα $t=\frac{L}{\upsilon_0}=\frac{3}{4}\cdot 10^{-8}s$ και $\Gamma E=\frac{1}{2}\alpha_y t^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{E|q|}{m}\cdot t^2=0,05m$.

Επειδή το πεδίο είναι ομογενές Η.Π. και συντηρητικό $V_{\Gamma A}=V_{\Gamma E}$ (αφού $V_{AE}=0$) $E=\frac{V_{\Gamma E}}{\Gamma E}=\frac{V_{\Gamma A}}{\Gamma E}\Rightarrow V_{\Gamma A}=E\cdot\Gamma E=500V$

β. Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε $A\rightarrow\Gamma$: $K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_{o\lambda}\Rightarrow$

$$\Delta K=q\cdot V_{A\Gamma}\Rightarrow\Delta K=\left(-1,6\cdot 10^{-19}C\right)\cdot\left(-500V\right)\Rightarrow\Delta K=8\cdot 10^{-17}J$$

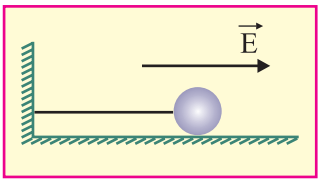
γ. Από τον 2ο νόμο Νεύτωνα $\left.\begin{array}{l}F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\\ F=E\cdot|q|\end{array}\right\}\frac{\Delta P}{\Delta t}=E\cdot|q|=1,6\cdot 10^{-15}N$

ενώ $\Delta P=E\cdot|q|\cdot\Delta t=1,6\cdot 10^{-15}N\cdot\frac{3}{4}\cdot 10^{-8}s=1,2\cdot 10^{-23}N\cdot s$

δ. Επειδή το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές $\Delta Z=\Gamma Z=S=10cm$.

Το $ZH=\Gamma E=5cm$ άρα $H\Delta=ZH+\Delta Z=15cm$.

8. **Σώμα μάζας $m=20kg$ και φορτίου $10\mu C$ βρίσκεται δεμένο στην ελεύθερη άκρη νήματος με όριο θραύσης $T_{o\rho}=10^2N$, η άλλη άκρη του οποίου είναι δεμένη σε κατακόρυφο τοίχο όπως δείχνει το σχήμα. Στο χώρο υπάρχει οριζόντιο Η.Π. παράλληλο προς το νήμα με τιμή**



$$E=\begin{cases}10^7 t(S.I.) & 0\le t\le 2s\\ 2\cdot 10^7 N/C & t>2s\end{cases}$$

α. Πότε κόβεται το νήμα;

β. Να παραστήσετε γραφικά την επιτάχυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο στο διάστημα $0\le t\le 4s$

γ. Πόση ταχύτητα αποκτά την χρονική στιγμή 2s;

δ. Κατά πόσο θα μετατοπιστεί από τη χρονική στιγμή 2s έως τη χρονική στιγμή 4s. Τριβές αμελητέες.

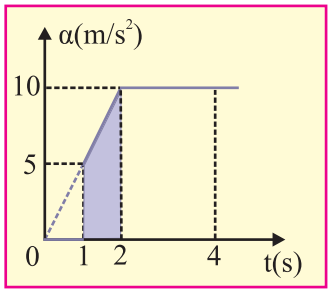
Λύση:

α. Για να κοπεί το νήμα πρέπει η ηλεκτρική δύναμη να ξεπεράσει οριακά το όριο θραύσης του νήματος.

$$F_e \geq T_{\theta_\rho} \Rightarrow q \cdot E \geq T_{\theta_\rho} \Rightarrow 10^{-5} \cdot 10^7 t \geq 10^2 \Rightarrow t \geq 1s .$$

β. Αμέσως μετά αρχίζει επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση:

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{10^{-5} \cdot 10^7 \cdot t}{2 \cdot 10} \Rightarrow \alpha = 5t \text{ με } 1 \leq t \leq 2s .$$



Έτσι από $t = 1s$ έως $t = 2s$ η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά από $5m/s^2$ έως $10m/s^2$. Στη συνέχεια η επιτάχυνση διατηρείται σταθερή και ίση με $10m/s^2$.

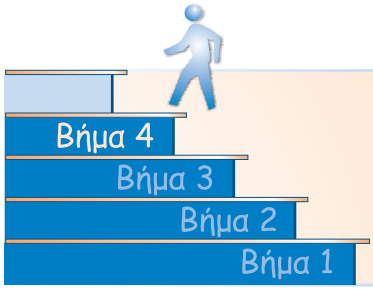
γ. Ως γνωστόν το γραμμοσκιασμένο εμβαδό εκφράζει τη μεταβολή της ταχύτητας από $t = 1$ έως $t = 2$ (ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα η κίνησή του). Άρα

$$\Delta\upsilon = \frac{5+10}{2} \cdot 1m/s = 7,5m/s \Rightarrow$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = 7,5m/s \Rightarrow \upsilon = 7,5m/s .$$

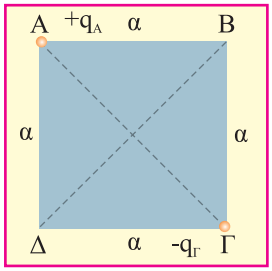
δ. Από την χρονική στιγμή 2 sec και μετά η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη και σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 2s$ (από 2 έως 4 sec) η μετατόπισή του είναι

$$\Delta x = \upsilon_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x = \left(7,5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2\right) m \Rightarrow \Delta x = 35m .$$



Λύνουμε μόνοι μας

1. Στα άκρα Α, Γ της διαγωνίου ΑΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 0{,}1\,m$, βρίσκονται ακλόνητα τα φορτία $q_A = 1 \cdot 10^{-9}\,C$ και $q_\Gamma = -2 \cdot 10^{-9}\,C$. Να υπολογιστούν:



α. το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή Β

β. η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων

γ. η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί για τη μετακίνηση του ενός από τα δύο φορτία σε άπειρη απόσταση.

Δίνεται: $K_c = 9 \cdot 10^9\,N \cdot m^2 / C^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Πάνω σε λεία και μονωτική οριζόντια επιφάνεια κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ μια μικρή σφαίρα με μάζα m και φορτίο +q. Κατά μήκος της ευθείας κίνησης της σφαίρας βρίσκεται σε ηρεμία μια άλλη μικρή σφαίρα μάζας

Μ και ηλεκτρικού φορτίου +Q. Αν δεχτούμε ότι αρχικά οι δυο σφαίρες βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, να υπολογιστούν:
α. τα μέτρα των ταχυτήτων τους όταν η απόστασή τους είναι ελάχιστη
β. η ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν.
Δίνεται η σταθερά K_c

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. **Έστω κατακόρυφο ομογενές Η.Σ.Π. του οποίου οι δυναμικές γραμμές έχουν φορά προς τα πάνω. Από κάποιο σημείο του πεδίου εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 50 m/s$ μικρή σφαίρα μάζας $m = 6g$ και φορτίου $q = -1,5 \mu C$. Η σφαίρα επιστρέφει στο σημείο βολής μετά από χρόνο $t = 4s$. Να βρεθεί το μέτρο της έντασης του Η.Σ.Π. Δίνεται: $g = 10 m/s^2$.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

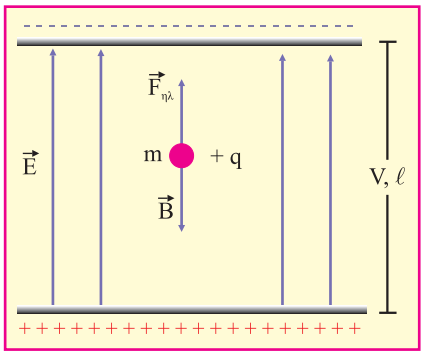
4. **Δύο οριζόντιες μεταλλικές πλάκες απέχουν απόσταση $\ell = 4cm$. Στο χώρο μεταξύ των πλακών αιωρείται μικρή σταγόνα μάζας $m = 2 \cdot 10^{-4} kg$ και**

φορτίου $q = 2 \cdot 10^{-7}\,C$.

α. Θεωρώντας ως δεδομένο ότι η σταγόνα ισορροπεί να προσδιορίσετε την πολικότητα των δύο πλακών.

β. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλακών;

γ. Πόση είναι η επιτάχυνση που αποκτά η σταγόνα αν διπλασιάσουμε την τάση; Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$.



.....

.....

.....

.....

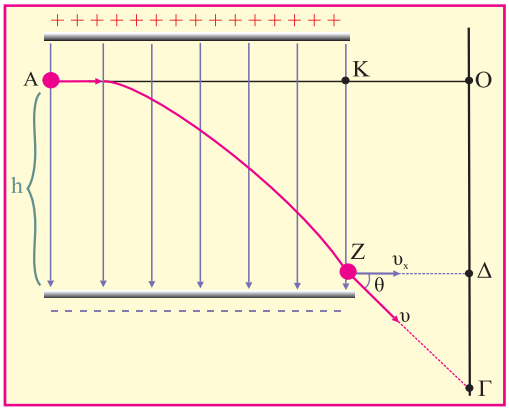
.....

.....

.....

.....

5. Σωματίδιο μάζας $4 \cdot 10^{-2}\,g$ και φορτίου $q = 20\,\mu C$ εισέρχεται με $\upsilon_0 = 100\,m/s$ κάθετα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των οριζόντιων οπλισμών επίπεδου πυκνωτή οι οποίοι απέχουν $d = 5\,cm$ και έχουν διαφορά δυναμικού $12{,}5\,kV$. Κατά την είσοδό του το σωματίδιο απέχει $h = 4{,}5\,cm$ από τον αρνητικό οπλισμό και κινείται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Οι οπλισμοί έχουν μήκος $L = 8\,cm$ ενώ σε απόσταση $b = 10\,cm$ από το πέρας του πυκνωτή υπάρχει κατακόρυφο πέτασμα πάνω στο οποίο πέφτει το σωματίδιο μετά την έξοδό του από το ηλεκτρικό πεδίο. Θεωρήστε τη βαρύτητα αμελητέα και υπολογίστε:



α. θέση και ταχύτητα σωματιδίου τη στιγμή $t = 0{,}2\,ms$

β. την ταχύτητα του σωματιδίου κατά την έξοδό του από το ηλεκτρικό

πεδίο καθώς και τη συνολική μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

γ. την κατακόρυφη απόκλιση ΚΖ την οποία θα υποστεί το σωματίδιο λόγω του ηλεκτρικού πεδίου και τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου Α και Ζ

δ. την τελική μεταβολή της ορμής του σωματιδίου

ε. το μέτρο της εκτροπής ΟΓ πάνω στο πέτασμα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

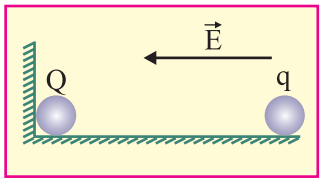
.....

.....

.....

.....

6. Σωματίδιο φορτίου $q = 1\mu C$ τοποθετείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση $r = 1m$ από ακλόνητο φορτίο $Q = 100\mu C$. Στο χώρο υπάρχει οριζόντιο ομογενές ΗΣΠ έντασης $E = 4 \cdot 10^5 N/C$ με φορά όπως στο σχήμα. Αφήνουμε το q ελεύθερο.



α. Βρείτε προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί.

β. Σε πόση απόσταση από το Q θα αποκτήσει το q μέγιστη κινητική ενέργεια; Πόση θα είναι αυτή;

γ. Υπολογίστε τη μέγιστη απόσταση των δύο φορτίων.

Δίνεται: $K_c = 9 \cdot 10^9$ (στο S.I.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Βήμα 5
Βήμα 4
Βήμα 3
Βήμα 2
Βήμα 1

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α.1. Ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται ομόρροπα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Η κίνηση του είναι:
α. ευθύγραμμη ομαλή.
β. ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.
γ. μεταβαλλόμενη.
δ. ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

2. Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $+Q_1$ και $+Q_2$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση r. Αν διατηρήσουμε ακλόνητο το Q_1 και αφήσουμε ελεύθερο το Q_2 θα κάνει κίνηση:
α. ευθύγραμμη ομαλή.
β. ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.
γ. ευθύγραμμη επιταχυνόμενη.
δ. ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη.

3. Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου με ταχύτητα υ_0. Τότε:
α. Ο χρόνος παραμονής του ηλεκτρόνιου στο πεδίο δεν εξαρτάται από τη υ_0.
β. Η απόκλιση από την αρχική διεύθυνση δεν εξαρτάται από τη υ_0.
γ. Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου κατά την έξοδό του από το πεδίο δεν εξαρτάται από τη υ_0.

4. Στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου βρίσκονται τρία ίσα φορτία έχοντας δυναμική ενέργεια $U = -20J$. Αν διπλασιάσουμε όλες τις πλευρές του τριγώνου τότε:
α. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνεται $U = -40J$.
β. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνεται $U = -10J$.

γ. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνεται $U = 10J$,

δ. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνεται $U = 40J$.

Β. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές λανθασμένες.

α. Αν από το ίδιο σημείο ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, εκτοξευθούν ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου τότε θα παραμείνουν τον ίδιο χρόνο στο πεδίο, αν έχουν την ίδια αρχική ταχύτητα. ( )

β. Η δύναμη που δέχεται φορτισμένο σωματίδιο που θα βρεθεί μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερή άρα και η επιτάχυνση που θα αποκτήσει θα είναι σταθερή. ( )

γ. Αν αφήσουμε σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένο σωματίδιο αμελητέου βάρους, τότε δεν δέχεται δύναμη, άρα θα παραμείνει ακίνητο. ( )

δ. Η επιτάχυνση και η απόκλιση ενός φορτισμένου σωματιδίου που έχει μπει κάθετα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο όπου δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες πυκνωτή δεν εξαρτάται από την διαφορά δυναμικού των πλακών. ( )

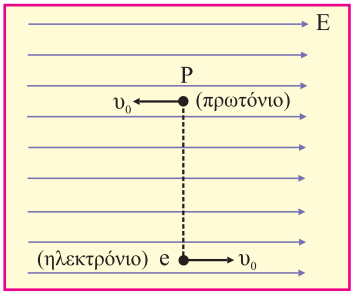
(Μονάδες 25)

Θέμα 2ο

1. Από τα σημεία ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου εκτοξεύονται ταυτόχρονα ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο όπως στο σχήμα, με την ίδια ταχύτητα.

Δίνεται: $q_p = |q_e|$, $m_p > m_e$

Βαρυτικές αλληλεπιδράσεις αμελητέες. Αμελητέα να θεωρηθεί και η ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση p και e.

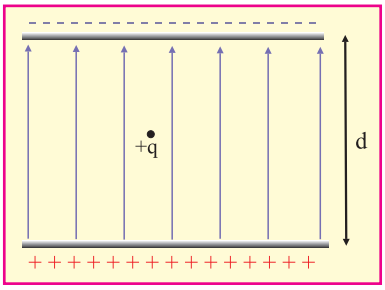


α. Θα γυρίσουν ταυτόχρονα στο σημείο εκτόξευσης τους;

β. Βρείτε το χρόνο μέχρι να ξαναεπιστρέψουν στο σημείο εκτόξευσης.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

2.Α. Το σωματίδιο μάζας m και φορτίου q ισορροπεί μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν μειώσουμε την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή προς τα που θα κινηθεί το φορτίο;

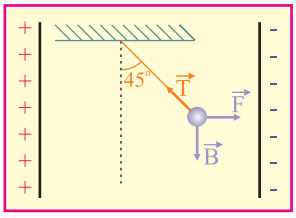
α. προς τα πάνω,

β. προς τα κάτω,

γ. θα μείνει ακίνητο

Β. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. Το φορτισμένο σωματίδιο του σχήματος ισορροπεί μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με την βοήθεια του νήματος σχηματίζοντας γωνία 45° με την κατακόρυφο.
Να δείξετε ότι το μέτρο του βάρους είναι ίσο με το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης F.



(Μονάδες 25)

Θέμα 3ο

Φορτισμένο σωματίδιο εκτοξεύεται παράλληλα και ομόρροπα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου με ταχύτητα $\upsilon_0 = 200 m/s$. Το σωματίδιο επιστρέφει στο σημείο της εκτόξευσης μετά από χρόνο $t = 10^{-14} s$. Αν η ένταση του πεδίου είναι $E = 100 N/C$. Να βρείτε :

α. Τι κίνηση θα εκτελέσει το φορτίο και τι πρόσημο έχει το φορτίο.

β. Το λόγο $\frac{|q|}{m}$ του φορτίου προς την μάζα του σωματιδίου.

γ. Την διαφορά δυναμικού από το σημείο της εκτόξευσης μέχρι το σημείο που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα του.

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο

Φορτισμένο σωματίδιο μάζας $m = 10^{-6}\,kg$ και φορτίου $q = 10^{-6}\,C$ αφήνεται από την άκρη ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που στα άκρα του έχει διαφορά δυναμικού $V_0 = 200V$. Το φορτίο βγαίνοντας από το ηλεκτρικό πεδίο μπαίνει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ενός άλλου ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από πυκνωτή. Το σημείο εισόδου του φορτίου απέχει από το θετικό οπλισμό $\ell_1 = 8cm$. Αν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών του πυκνωτή είναι $V = 100V$ η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι $\ell = 20cm$ και το μήκος των πλακών $d = 40cm$, να βρείτε: (Οι βαρυτικές δυνάμεις να θεωρηθούν αμελητέες)

α. Την ταχύτητα με την οποία μπαίνει το φορτίο στο πεδίο του πυκνωτή.

β. Αποδείξτε ότι το φορτίο θα βγεί από το πεδίο του πυκνωτή.

γ. Τον χρόνο κίνησης του σωματιδίου και στα δύο πεδία, αν ο χρόνος του στο πρώτο πεδίο είναι διπλάσιος του χρόνου στο πεδίο του πυκνωτή.

δ. Ποιά η διαφορά δυναμικού μεταξύ σημείου εισόδου και εξόδου στον πυκνωτή.

(Μονάδες 25)

Κεφάλαιο 4ο

Κίνηση φορτίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο της κίνησης φορτίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο πρέπει να γνωρίζει:

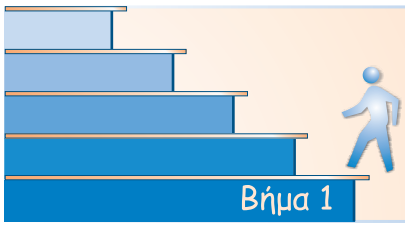
- ✓ Τι είναι η δύναμη Lorentz. Πότε εμφανίζεται και ποιος είναι ο μαθηματικός τύπος της.
- ✓ Τι κίνηση εκτελεί ένα φορτισμένο σωματίδιο ανάλογα με την γωνία με την οποία εισέρχεται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.
- ✓ Η δύναμη Lorentz είναι μηδέν όταν $\upsilon = 0$ ή όταν $\varphi = 0^o$ ή $\varphi = 180^o$ ή όταν το σωματίδιο είναι αφόρτιστο.
- ✓ Αν από το ίδιο σημείο του μαγνητικού πεδίου μπουν ταυτόχρονα όμοια σωματίδια με το ίδιο φορτίο και μάζα αλλά με διαφορετικές ταχύτητες κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, παρόλο που θα εκτελέσουν κύκλους διαφορετικών ακτίνων, θα φτάσουν ταυτόχρονα στο σημείο της εκτόξευσης δηλαδή θα έχουν την ίδια περίοδο Τ.
- ✓ Να βρίσκει τις εξισώσεις ακτίνας και περίοδου για σωματίδιο που μπαίνει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου.
- ✓ Αν το σωματίδιο μπει με γωνία $\varphi = 90^o$ ως προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ζητείται το συνολικό μήκος τόξου που διαγράφει και οι περιστροφές του σωματιδίου σε χρόνο t να γνωρίζει τις σχέσεις $s = N \cdot 2\pi R$, $N = \frac{t}{T}$ όπου N ο αριθμός των περιστροφών (όχι απαραίτητα φυσικός αριθμός).
- ✓ Για να προσδιοριστεί το κέντρο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει ένα σωματίδιο όταν εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές: κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το σημείο εισόδου και το σημείο εξόδου, φέρουμε την μεσο-

κάθετη του παραπάνω ευθύγραμμου τμήματος και σχεδιάζουμε την δύναμη Lorentz στο σημείο εισόδου ή στο σημείο εξόδου. Το σημείο τομής της μεσοκαθέτου και της διεύθυνσης της δύναμης Lorentz θα αποτελεί το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

- ✓ Όταν το σωματίδιο μπει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου τότε σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσα τόξα.
- ✓ Αν το σωματίδιο μπει κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου, η F_L μεταβάλλει μόνο την διεύθυνση της ταχύτητας του φορτίου και όχι το μέτρο της γιατί παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Έτσι το σωματίδιο αποκτά κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$.
- ✓ Επειδή η δύναμη F_L είναι συνεχώς κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου δεν παράγει έργο.

Κίνηση φορτίου σε μαγνητικό πεδίο: Τύποι - Βασικές έννοιες

Δύναμη Lorentz, που ασκεί το μαγνητικό πεδίο σε κινούμενο φορτίο:	$F_L = B\upsilon\lvert q\rvert \eta\mu\varphi$
Ακτίνα κυκλικής τροχιάς, όταν $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$:	$R = \frac{m\upsilon}{B\lvert q\rvert}$
Περίοδος περιστροφής σωματιδίου:	$T = \frac{2\pi m}{B\lvert q\rvert}$
Ακτίνα ελικοειδούς κίνησης, $\left(\widehat{\vec{\upsilon},\vec{B}}\right) = \varphi$:	$R = \frac{m\upsilon \cdot \eta\mu\varphi}{\lvert q\rvert B}$
Βήμα έλικας:	$\beta = \upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot T$

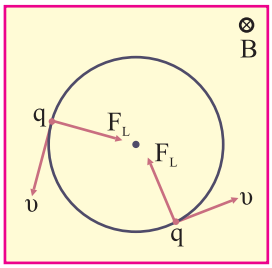


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

ΘΕΩΡΙΑ 1 **α. Κίνηση φορτίου που μπαίνει με $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.**
β. Κίνηση φορτίου που μπαίνει υπό τυχαία γωνία σε ομογενές ΜΠ

Απόδειξη

α. Το θετικό φορτίο q δέχεται δύναμη Lorentz η οποία παραμένει μονίμως κάθετη στην ταχύτητά του παίζοντας ρόλο κεντρομόλου. Έτσι το φορτίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, της οποίας υπολογίζουμε ακτίνα και περίοδο:

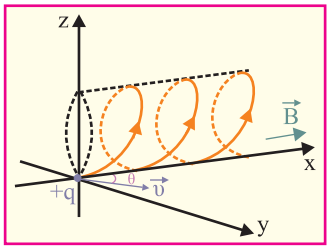


$$F_L = F_{ΚΕΝΤ} \Rightarrow B\upsilon q = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m\upsilon}{qB}$$

$$\text{ενώ } T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi \frac{m\upsilon}{qB}}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Παρατηρούμε ότι η περίοδος είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας του σωματιδίου.

β. Το φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο +q κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ η οποία σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Η μελέτη της κίνησης του σωματιδίου θα γίνει χρησιμοποιώντας την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε δύο άξονες: ο ένας στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών, έστω x και ο άλλος κάθετος προς τις δυναμικές γραμμές. Οι δύο συνιστώσες τις ταχύτητας είναι:



$$\upsilon_x = \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \quad (1)$$

$$\upsilon_\kappa = \upsilon \cdot \eta\mu\theta \quad (2)$$

Επειδή η συνιστώσα υ_x είναι παράλληλη με τις δυναμικές γραμμές δεν αναπτύσσεται δύναμη Lorentz κατά μήκος του άξονα x και ως εκ τούτου το σωματίδιο θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά.

Λόγω της συνιστώσας υ_κ που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές θα αναπτυχθεί δύναμη Lorentz μέτρου: $F_L = q\upsilon_\kappa B = q\upsilon B\eta\mu\theta$ η οποία το αναγκάζει να εκτελέσει κυκλική κίνηση σε επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές (αφού η F_L αναπτύσσεται κάθετα στα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{\upsilon}$) με γραμμική ταχύτητα μέτρου υ_κ και ακτίνα R η οποία υπολογίζεται όπως προηγούμενα:

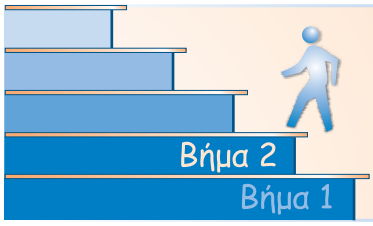
$$R = \frac{m \cdot \upsilon_\kappa}{q \cdot B} = \frac{m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu\theta}{q \cdot B} \quad (3)$$

Από τη σύνθεση των δύο προηγούμενων κινήσεων, μιας ομαλής κυκλικής σε επίπεδο κάθετο προς τις δυναμικές γραμμές και μιας ευθύγραμμης ομαλής κατά τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών, προκύπτει μια ελικοειδής κίνηση, ειδικότερα η τροχιά είναι κυλινδρική έλικα σταθερού βήματος. Χαρακτηριστικά στοιχεία της ελικοειδούς τροχιάς είναι η ακτίνα R κάθε σπείρας και το βήμα β της έλικας.

Το βήμα της έλικας είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών και ισούται με το μήκος που διανύει το σωματίδιο, λόγω της υ_x συνιστώσας, σε χρόνο που χρειάζεται το σωματίδιο να διαγράψει μια σπείρα, δηλαδή σε χρόνο μιας περιόδου T της κυκλικής κίνησης.

$$\beta = \upsilon_x T \overset{(1)}{\Rightarrow} \beta = \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot T \quad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση για την περίοδο: $T = \frac{2\pi m}{|q|B}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (4) προκύπτει: $\beta = \frac{2\pi m\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{|q|B}$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 171 - 173: Ερωτήσεις 4.14, 4.15, 4.17, 4.18, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27

σ. 176: Ασκήσεις 4.46, 4.47, 4.48

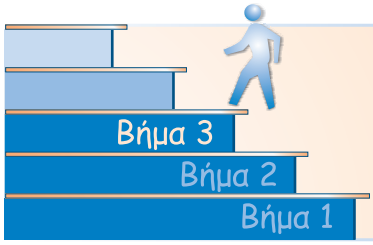
σ. 179: Προβλήματα 4.59, 4.60, 4.64

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ.σ. 116 - 124: Τα παραδείγματα 4.2, 4.3, 4.6, 4.7, 4.9,

σ. 128: Ασκήσεις 4.2, 4.5



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Ένα ηλεκτρόνιο με φορτίο $-1,6\cdot10^{-19}$C και μάζα $9\cdot10^{-31}$kg εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=2\cdot10^{-3}$T με ορμή $p=28,8\cdot10^{-26}$kg·m/s κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Να υπολογιστούν:**

α. η ταχύτητά του και η ακτίνα της κυκλικής του τροχιάς

β. ο χρόνος που απαιτείται για να διαγράψει το ηλεκτρόνιο ένα τεταρτοκύκλιο

γ. η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας στη διάρκεια μίας περιστροφής

δ. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του ηλεκτρονίου όταν θα έχει διαγράψει ένα τεταρτοκύκλιο.

Λύση:

α. Υπολογίζουμε την ταχύτητα με την οποία εισέρχεται στο Ο.Μ.Π. από τη σχέση $p=m\cdot\upsilon \Rightarrow \upsilon=\frac{p}{m}=\frac{28,8\cdot10^{-26}}{9\cdot10^{-31}}\,m/s \Rightarrow \upsilon=3,2\cdot10^{5}\,m/s$, μέσα στο οποίο θα εκτελέσει το ένα τέταρτο της κυκλικής του τροχιάς.

α. Η ακτίνα της κυκλικής του τροχιάς είναι:

$$R=\frac{m\upsilon}{|q|B}=\frac{9\cdot10^{-31}\cdot3,2\cdot10^{5}}{1,6\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-3}}\,m \Rightarrow R=9\cdot10^{-4}\,m\,.$$

β. Η περίοδος της κυκλικής του κίνησης είναι:

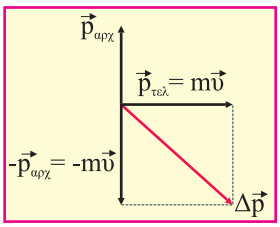
$T=\frac{2\pi m}{|q|B}=\frac{2\pi\cdot9\cdot10^{-31}}{1,6\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-3}}\,s=5,625\pi\cdot10^{-9}\,s$ άρα ο χρόνος που απαιτείται για ένα τεταρτοκύκλιο είναι $t=\frac{T}{4}=1,4\cdot10^{-9}\pi\cdot s$.

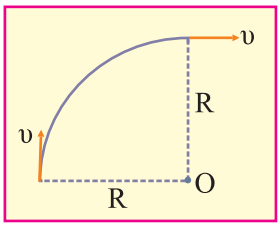
γ. Επειδή το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου δεν αλλάζει μέσα στο Ο.Μ.Π., η μεταβολή στην κινητική του ενέργεια είναι:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 0$$

δ. Η μεταβολή της ορμής θα είναι:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} + \left(-\vec{p}_{\alpha\rho\chi}\right)$$



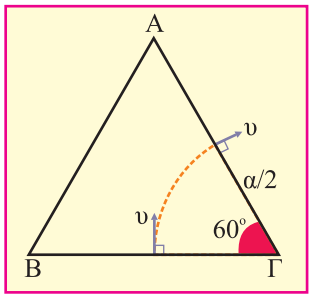


Επομένως το μέτρο της μεταβολής της ορμής θα υπολογιστεί:

$$\Delta p = \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\tau\varepsilon\lambda}^2} = \sqrt{(m\upsilon)^2 + (m\upsilon)^2} = \sqrt{2\cdot(m\upsilon)^2} =$$

$$= m\upsilon\cdot\sqrt{2} = 28{,}8\cdot 10^{-6}\cdot\sqrt{2}\,\text{Kg}\cdot\text{m/s}$$

2. Ένα ηλεκτρόνιο με φορτίο $-1{,}6\cdot 10^{-19}$C και μάζα $9\cdot 10^{-31}$kg εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 10^{-5}$T, το οποίο έχει τομή ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\alpha = 0{,}18$m. Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο πεδίο κάθετα από το μέσο της μιας πλευράς του τριγώνου και εξέρχεται κάθετα από το μέσο της άλλης πλευράς. Να υπολογίσετε:



α. την ταχύτητα με την οποία εισέρχεται το ηλεκτρόνιο στο μαγνητικό πεδίο

β. τον χρόνο παραμονής του ηλεκτρονίου μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο

γ. το έργο της δύναμης που του ασκείται από το ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Λύση:

Όταν το ηλεκτρόνιο εισέρχεται κάθετα από το μέσο της ΒΓ και εξέρχεται κάθετα από το μέσο της ΑΓ, το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του θα είναι η κορυφή Γ του ισοπλεύρου τριγώνου και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς θα είναι ίση με $\frac{\alpha}{2}$.

α. Επομένως,

$$R=\frac{\alpha}{2}=\frac{m\upsilon}{|q|B}\Rightarrow \upsilon=\frac{\alpha\cdot|q|\cdot B}{2m}=\frac{0,18\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-5}}{2\cdot 9\cdot 10^{-31}}\,m/s\Rightarrow \upsilon=1,6\cdot 10^{5}\,m/s$$

β. Η περίοδος της κυκλικής κίνησης θα είναι: $T=\frac{2\pi m}{|q|B}\Rightarrow$

$$T=\frac{2\pi\cdot 9\cdot 10^{-31}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-5}}\,s\Rightarrow T=1,125\pi\cdot 10^{-6}\,s$$

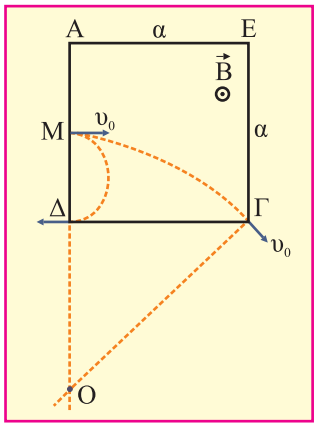
Σε χρόνο $T=1,125\pi\cdot 10^{-6}\,s$ διαγράφει γωνία $2\pi\,rad$

t;	$\frac{\pi}{3}rad\left(=60^{o}\right)$

άρα $t=\frac{T}{6}=1,875\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,s$

γ. Επειδή η δύναμη Lorentz που ασκεί το Ο.Μ.Π. στο ηλεκτρόνιο είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα επομένως και στη μετατόπιση, δεν παράγει έργο, δηλαδή $W_{F_L}=0$.

3. Η κάθετη τομή ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου είναι τετράγωνο ΑΕΓΔ πλευράς $\alpha=10cm$. Ένα φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο $q=10^{-12}C$ και μάζα $m=10^{-18}kg$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0=10^5 m/s$ και εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο κάθετα στο μέσο της πλευράς ΑΔ. Να υπολογίσετε:



α. την ένταση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου, τη δύναμη Lorentz και τον χρόνο παραμονής του σωματιδίου μέσα στο πεδίο, προκειμένου το σωματίδιο να εξέρχεται από την κορυφή Δ του τετραγώνου

β. την ένταση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου και τη δύναμη Lorentz που ασκείται στο φορτισμένο σωματίδιο από το μαγνητικό πεδίο, προκειμένου αυτό να εξέλθει από την κορυφή Γ του τετραγώνου.

Λύση:

α. Όταν εξέρχεται από την κορυφή Δ του τετραγώνου, έχει διαγράψει ημικύκλιο μέσα στο Ο.Μ.Π. οπότε: $2R = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = \frac{\alpha}{4} = 2,5 \cdot 10^{-2}\,m$. $(M\Delta = 2R)$.

Άρα: $R = \frac{m\upsilon}{qB} \Rightarrow B = \frac{m\upsilon}{qR} = \frac{10^{-18} \cdot 10^{5}\,T}{10^{-12} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow B = 4T$

Η δύναμη Lorentz θα είναι: $F_L = B\upsilon q = 4 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-12}\,N \Rightarrow F_L = 4 \cdot 10^{-7}\,N$

Η περίοδος θα είναι: $T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 10^{-18}}{10^{-12} \cdot 4}\,s \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6}\,s$ άρα ο χρόνος παραμονής του σωματιδίου στο Ο.Μ.Π. είναι $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-6}\,s$.

β. Όταν εξέρχεται από την κορυφή Γ του τετραγώνου, το κέντρο της κυκλικής του τροχιάς βρίσκεται στο σημείο Ο, που είναι το σημείο τομής των καθέτων που φέρνουμε στη διεύθυνση της ταχύτητας εισόδου και ταχύτητας εξόδου από το Ο.Μ.Π.

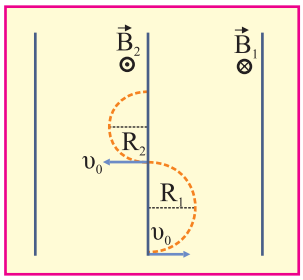
Στο τρίγωνο ΟΔΓ έχουμε: $O\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + O\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + (OM - M\Delta)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R^2 = \alpha^2 + \left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{5\alpha}{4} = \frac{5}{4} \cdot 10^{-1}\,m\,.$$

Επομένως: $R = \frac{m\upsilon}{qB} \Rightarrow B = \frac{m\upsilon}{qR} \Rightarrow B = 0,8\,T$

Η δύναμη Lorentz θα είναι: $F_L = B\upsilon q \Leftrightarrow F_L = 8 \cdot 10^{-8}\,N$

4. Φορτισμένο σωματίδιο με μάζα $m = 10^{-15}\,kg$ και φορτίο $q = 10^{-6}\,C$ εισέρχεται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 4 \cdot 10^{5}\,m/s$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B_1 = 5 \cdot 10^{-2}\,T$ και αφού διαγράψει ημικύκλιο εισέρχεται σε δεύτερο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B_2 = 10^{-1}\,T$ και αντίθετης φοράς με το πρώτο πεδίο. Να υπολογιστούν:



α. οι ακτίνες των ημικυκλίων που διαγράφει το σωματίδιο σε κάθε ένα από τα πεδία
β. η δύναμη Lorentz που ασκείται στο σωματίδιο από το δεύτερο πεδίο
γ. ο χρόνος από την αρχική εκτόξευση μέχρι να εξέλθει το σωματίδιο και από το δεύτερο μαγνητικό πεδίο
δ. το διάστημα που διατρέχει το σωματίδιο στον αντίστοιχο χρόνο του γ ερωτήματος.

Λύση:

α. Στο Ο.Μ.Π. έντασης B_1 διαγράφει ημικύκλιο ακτίνας $R_1 = \frac{m\upsilon_0}{qB_1} = 8\cdot 10^{-3}\,m$

και στο Ο.Μ.Π. έντασης B_2 ακτίνας $R_2 = \frac{m\upsilon_0}{qB_2} = 4\cdot 10^{-3}\,m$.

β. Η δύναμη Lorentz από το Ο.Μ.Π. έντασης B_2 είναι: $F_L = B_2\cdot\upsilon_0\cdot q = 4\cdot 10^{-2}\,N$

γ. Ο χρόνος που διαγράφει το ημικύκλιο στο Ο.Μ.Π. έντασης B_1 είναι:

$t_1 = \frac{T_1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi m}{qB_1} = 2\pi\cdot 10^{-8}\,s$, ενώ ο χρόνος που διαγράφει το ημικύκλιο στο

Ο.Μ.Π. έντασης B_2 είναι: $t_2 = \frac{T_2}{2} = \frac{\pi m}{qB_2} = \pi\cdot 10^{-8}\,s$. Άρα ο συνολικός χρόνος

θα είναι: $t = t_1 + t_2 = 3\pi\cdot 10^{-8}\,s$.

δ. Το διάστημα που διατρέχει το σωματίδιο στο Ο.Μ.Π. έντασης B_1 είναι:

$x_1 = \frac{2\pi R_1}{2} = \pi R_1 = 8\pi\cdot 10^{-3}\,m$ ενώ στο Ο.Μ.Π. έντασης B_2 είναι:

$x_2 = \frac{2\pi R_2}{2} = \pi R_2 = 4\pi\cdot 10^{-3}\,m$.

Άρα το συνολικό διάστημα θα είναι: $x = x_1 + x_2 = 12\pi\cdot 10^{-3}\,m$

5. Ηλεκτρόνιο μάζας $m = 9\cdot 10^{-31}\,kg$ και φορτίου $q = -1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 6\cdot 10^4\,m/s$ και μπαίνει στο εσωτερικό πηνίου σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 60^o$ με τον άξονά του. Το πηνίο έχει μήκος $\ell = 36\,cm$, αποτελείται από $N = 270$ σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα έντασης

$I = 1,25\,A$. Αν θεωρήσουμε ότι σε όλο το μήκος του πηνίου το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές με ένταση μαγνητικού πεδίου όση είναι στο κέντρο του, να βρεθούν:

α. η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί το πηνίο στο εσωτερικό του

β. το είδος της κίνησης του ηλεκτρονίου

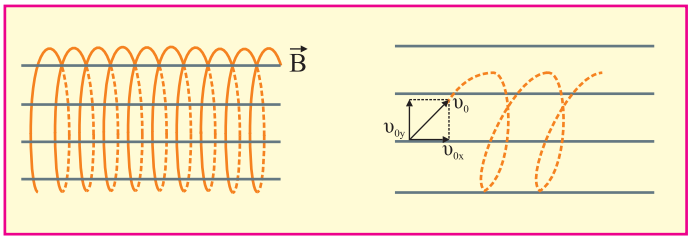
γ. η περίοδος της κυκλικής κίνησης και το βήμα της έλικας

δ. ο χρόνος που χρειάζεται για να βγει το ηλεκτρόνιο από το πηνίο

ε. ο αριθμός των περιστροφών που θα διαγράψει το ηλεκτρόνιο μέχρι να βγει από το πηνίο.

Δίνεται: $k_\mu = 10^{-7}\,\frac{N}{A^2}$.

Λύση:



α. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι:

$$B = k_\mu \cdot 4\pi \cdot I \cdot \frac{N}{\ell} = 3,75 \cdot \pi \cdot 10^{-4}\,T\,.$$

β. Αναλύουμε τη $\vec{\upsilon}_0$ σε δύο συνιστώσες, $\vec{\upsilon}_{ox}$ και $\vec{\upsilon}_{oy}$. Με την υ_{ox} θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά, ενώ με την υ_{oy} θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση. Από τη σύνθεση των δύο κινήσεων προκύπτει μια ελικοειδής κίνηση.

γ. Η περίοδος της κυκλικής κίνησης είναι: $T = \frac{2\pi m}{|q|B} = 3 \cdot 10^{-8}\,s$ και το βήμα της έλικας είναι: $\beta = \upsilon_{ox} \cdot T \Rightarrow \beta = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot T \Rightarrow \beta = 9 \cdot 10^{-4}\,m$.

δ. Ο χρόνος για να βγεί το ηλεκτρόνιο από το πηνίο υπολογίζεται ως εξής:

$$\ell = \upsilon_{ox} \cdot t \Rightarrow t = \frac{\ell}{\upsilon_{ox}} \Rightarrow t = \frac{\ell}{\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi} = 12 \cdot 10^{-6}\,s\,.$$

ε. Ο αριθμός των περιστροφών που θα διαγράψει το ηλεκτρόνιο μέχρι να βγεί από το πηνίο θα είναι: $N = \frac{t}{T} = 400$ στροφές.

6. **Οι οριζόντιοι οπλισμοί ενός πυκνωτή με απόσταση μεταξύ των οπλισμών $\ell = 4cm$ και μήκος οπλισμών $d = 10cm$, φέρουν φορτίο $Q = 128nC$. Από το μέσο της απόστασης μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή εκτοξεύουμε ένα πρωτόνιο με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 2 \cdot 10^3 m/s$, κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Το πρωτόνιο εξέρχεται από τον πυκνωτή εφαπτομενικά στον αρνητικό οπλισμό και εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0,2T$, του οποίου οι δυναμικές του γραμμές είναι παράλληλες με την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας υ_0. Να βρείτε:**

α. την ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή

β. τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή

γ. τη χωρητικότητα του πυκνωτή

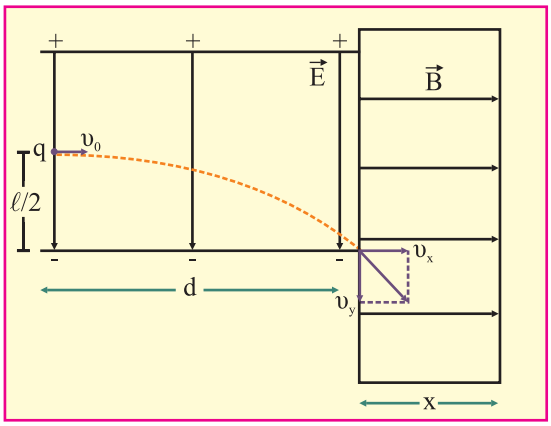
δ. την ακτίνα της έλικας που θα εκτελέσει το πρωτόνιο

ε. το βήμα της έλικας

στ. αν το ομογενές μαγνητικό πεδίο έχει μήκος $x = 20cm$, σε πόσο χρόνο το πρωτόνιο θα βγει από το μαγνητικό πεδίο;

Δίνεται: $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27} kg$, $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.

Λύση:



Αναλύουμε την κίνηση του πρωτονίου σε δύο ανεξάρτητες κινήσεις. Μια ευθύγραμμη ομαλή στον άξονα x΄x με εξισώσεις κίνησης: $\upsilon_x = \upsilon_0$ (1) και $x = \upsilon_0 \cdot t$ (2) και μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτη-

τα στον άξονα y΄y: $\upsilon_y = \alpha \cdot t$ (3) και $y = \frac{1}{2}\alpha t^2$ (4) με επιτάχυνση: $\alpha = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot E}{m}$ (5).

α. Ο χρόνος που θα κινηθεί το πρωτόνιο στο Ο.Η.Π. είναι $t = \frac{d}{\upsilon_0} = 5 \cdot 10^{-5}\,s$ και αφού η απόκλιση του θα είναι $\frac{\ell}{2}$, τότε από την (4) έχω:

$$\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m} \cdot t^2 \Rightarrow E = 1{,}6 \cdot 10^{-1}\,N/C.$$

β. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή θα είναι:

$$E = \frac{V}{\ell} \Leftrightarrow V = E \cdot \ell = 6{,}4 \cdot 10^{-3}\,V.$$

γ. Η χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι: $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = 2 \cdot 10^{-5}\,F$.

δ. Το πρωτόνιο εισέρχεται στο Ο.Μ.Π. με την $\upsilon_x = \upsilon_0$ να είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές και την υ_y να είναι κάθετη σε αυτές. Άρα θα εκτελέσει ελικοειδή κίνηση. Η ακτίνα της έλικας θα είναι: $R = \frac{m\upsilon_y}{qB} \Rightarrow R = 4 \cdot 10^{-5}\,m$, αφού $\upsilon_y = \alpha \cdot t \Rightarrow \upsilon_y = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t$.

ε. Το βήμα της έλικας θα είναι: $\beta = \upsilon_x \cdot T = \upsilon_0 \cdot T \Rightarrow \beta = 2\pi \cdot 10^{-4}\,m$.

στ. Ο χρόνος που χρειάζεται το πρωτόνιο για να βγεί από το μαγνητικό πεδίο είναι: $x = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon_0} \Rightarrow t = 10^{-4}\,s$.

7. Σε ένα πυρηνικό πείραμα, ένας πυρήνας ^4_2He κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 10^{-2}\,T$, κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $R_1 = 4\,cm$. Κάποια στιγμή ο πυρήνας διαπερνά ένα λεπτό φύλλο μολύβδου, οπότε χάνει ενέργεια. Αμέσως μετά ο πυρήνας συνεχίζει να κινείται μέσα στο ίδιο

ομογενές μαγνητικό πεδίο αλλά σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R_2 = 1cm$. Να υπολογιστούν:

α. η ταχύτητα του πυρήνα πριν διαπεράσει το φύλλο μολύβδου

β. η κινητική ενέργεια του πυρήνα αφού διαπεράσει το φύλλο μολύβδου

γ. η περίοδος της κίνησης του πυρήνα πριν περάσει το φύλλο του μολύβδου και αφού το διαπεράσει. Τι παρατηρείτε;

δ. η απώλεια ενέργειας του πυρήνα κατά το πέρασμά του μέσα από το φύλλο του μολύβδου.

Δίνονται: μάζα πρωτονίου = μάζα νετρονίου $= 1,6 \cdot 10^{-27} kg$ και φορτίο πρωτονίου $= 1,6 \cdot 10^{-19} C$.

Λύση:

α. Είναι: $R_1 = \frac{m\upsilon_1}{qB} = \frac{4m_p \cdot \upsilon_1}{2q_p \cdot B} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{2R_1 \cdot q_p \cdot B}{4m_p} =$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-27}} m/s = 2 \cdot 10^4 m/s$$

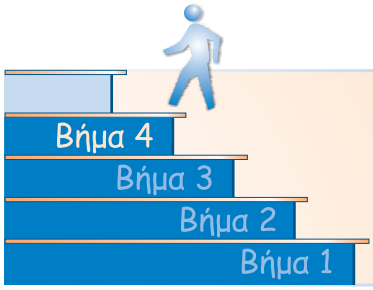
β. Επειδή $R_2 = \frac{R_1}{4}$ θα είναι και $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{4}$

Επομένως: $K_2 = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 = 8 \cdot 10^{-20} J$

γ. $T_1 = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi 4m_p}{2q_p \cdot B} = 4\pi \cdot 10^{-5} s$ ενώ $T_2 = \frac{2\pi m}{qB} = T_1$ επομένως παρατηρούμε ότι η περίοδος της κίνησης δεν μεταβάλλεται.

δ. $\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = -1,2 \cdot 10^{-18} J$.

Επομένως απώλειες $= |\Delta K| = 1,2 \cdot 10^{-18} J$



Λύνουμε μόνοι μας

1. Δύο θετικά ιόντα Α και Β με μάζες $m_A = 6m_B$ και φορτία $q_A = 3q_B$, εκτοξεύονται με την ίδια ταχύτητα υ_0 κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης Β. Να υπολογιστούν:

α. ο λόγος των κινητικών τους ενεργειών

β. ο λόγος των ακτίνων των κυκλικών τροχιών που διαγράφουν τα ιόντα μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο

γ. ο λόγος των περιόδων των δύο ιόντων.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Δύο σωματίδια με μάζες $m_1 = 2 \cdot 10^{-10}\,kg$ και $m_2 = 10^{-10}\,kg$ και φορτία $q_1 = +4 \cdot 10^{-6}\,C$ και $q_2 = +10^{-6}\,C$ εκτοξεύονται ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο με ταχύτητες $\upsilon_1 = 20\,m/s$ και $\upsilon_2 = 40\,m/s$ κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 10^{-3}\,T$.

α. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των τροχιών των δύο σωματιδίων.

β. Να βρεθεί ο λόγος των περιόδων της κίνησης των δύο σωματιδίων.

γ. Αν το πρώτο σωματίδιο έχει διαγράψει 100 περιστροφές, πόσες θα έχει διαγράψει το δεύτερο σωματίδιο στον ίδιο χρόνο;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου $q = +3,2 \cdot 10^{-19}\,C$ εισέρχεται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 24 \cdot 10^6\,m/s$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 1,2\,T$. Το φορτισμένο σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο διαγράφει ημικύκλιο ακτίνας $R = 20\,cm$. Να υπολογιστούν:

α. η μάζα του σωματιδίου

β. ο χρόνος που απαιτείται για το σωματίδιο για να διαγράψει το ημικύκλιο

γ. το μέτρο της δύναμης Lorentz

δ. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Ένα ηλεκτρόνιο μάζας $m = 9 \cdot 10^{-31}\,kg$ έχει ορμή $1,8 \cdot 10^{-23}\,kg \cdot m/s$ όταν μπαίνει σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0,25\,T$, ενώ το διάνυσμα της ταχύτητάς του σχηματίζει γωνία θ με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Αν το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι κατά απόλυτη τιμή ίσο με $1,6 \cdot 10^{-19}\,C$ και δίνεται ότι $ημθ = 0,8$, τότε:

α. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης του ηλεκτρονίου.
β. Να υπολογίσετε την ακτίνα.
γ. Να υπολογίσετε το βήμα της ελικοειδούς τροχιάς που διαγράφει αυτό.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. Έχουμε δύο όμοια φορτισμένα σωματίδια Α και Β με μάζα $m = 10^{-10}\,kg$ και φορτίο $q = +2\mu C$, τα οποία εκτοξεύονται με ταχύτητα ίδιου μέτρου $\upsilon = 2 \cdot 10^4\,m/s$ από το ίδιο σημείο μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0,2T$. Το σωματίδιο Α εκτοξεύεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου και το σωματίδιο Β παράλληλα με αυτές.

α. Να υπολογιστεί η δύναμη Lorentz που θα ασκηθεί σε κάθε ένα από τα δύο σωματίδια.
β. Να προσδιοριστεί το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει το κάθε ένα σωματίδιο.
γ. Για το σωματίδιο που θα εκτελέσει κυκλική κίνηση, να υπολογιστεί η ακτίνα και η περίοδος της κυκλικής τροχιάς.
δ. Σε χρόνο $t = 4\pi \cdot 10^{-2}\,s$, να υπολογιστεί το πλήθος των περιστροφών που θα εκτελέσει το ένα σωματίδιο και την απόσταση που θα έχει διανύσει το άλλο σωματίδιο.
ε. Να δείξετε ότι και τα δύο σωματίδια θα έχουν διανύσει το ίδιο μήκος τροχιάς.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6. Πρωτόνιο μάζας $1,6 \cdot 10^{-27}\,kg$ και φορτίου $1,6 \cdot 10^{-19}\,C$ αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Το πρωτόνιο επιταχύνεται και μετά από χρόνο $t = 1s$ βγαίνει από το ηλεκτρικό πεδίο και μπαίνει σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 10^{-2}\,T$. Το πρωτόνιο εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου, οπότε διαγράφει ημικυκλική τροχιά ακτίνας $R = 1mm$ και εξέρχεται από αυτό.

α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του πρωτονίου με την οποία εισέρχεται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.

β. Να υπολογιστεί η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που επιταχύνει το πρωτόνιο.

γ. Να υπολογιστεί το διάστημα που διέτρεξε το πρωτόνιο μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

δ. Να υπολογιστεί η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του πρωτονίου από την στιγμή της εξόδου του από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέχρι την έξοδό του από το ομογενές μαγνητικό πεδίο.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα $m = 10^{-12}\,kg$ και φορτίο $q = +2\mu C$ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε χώρο όπου συνυπάρχει ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E = 10^4\,N/C$ και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B_1 = 0,1T$. Στη συνέχεια οδηγείται σε χώρο που υπάρχει ένα δεύτερο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B_2 = 0,5T$, μέσα στο οποίο αφού διαγράψει ημικυκλική τροχιά εξέρχεται από αυτό.

α. Να γίνει ένα σχήμα στο οποίο να φαίνεται η πορεία του σωματιδίου μέσα από τα πεδία.

β. Να περιγραφούν τα είδη των κινήσεων που θα εκτελέσει το σωματίδιο.

γ. Να υπολογιστεί η ακτίνα της ημικυκλικής τροχιάς.

δ. Να υπολογιστεί η χρονική διάρκεια της κίνησης του σωματιδίου μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_2.

ε. Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων εισόδου και εξόδου από το μαγνητικό πεδίο έντασης B_2.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Θετικό ιόν με λόγο $q/m = 10^5\ C/kg$ ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνεται από τάση $V = 2000V$. Στη συνέχεια μπαίνει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 0,1T$, όπου η δύναμη που ασκείται πάνω του από το πεδίο το εκτρέπει κατά τρόπο τέτοιο ώστε αφού διανύσει το ένα τέταρτο της περιφέρειας ενός κύκλου να βγει από το ομογενές μαγνητικό πεδίο και να μπει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης $E = 10^4\ N/C$. Το θετικό ιόν βγαίνοντας από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, που έχει μήκος $L = 20cm$, πέφτει πάνω σε οθόνη που βρίσκεται σε απόσταση $S = 10cm$ από την έξοδο του πεδίου. Να βρεθούν:

α. η ακτίνα του τεταρτοκυκλίου που διέγραψε το ιόν
β. ο χρόνος παραμονής του ιόντος στο ομογενές μαγνητικό πεδίο
γ. ο χρόνος κίνησης του ιόντος στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
δ. η ταχύτητα εξόδου του ιόντος από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
ε. η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
στ. η συνολική απόκλιση του ιόντος πάνω στην οθόνη.

.....

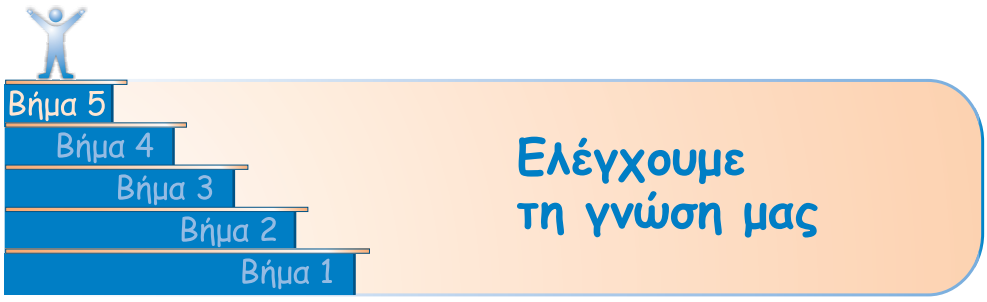
.....

.....

.....

.....

.....



Θέμα 1ο

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα φορτισμένο σωματίδιο αφήνεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο χωρίς ταχύτητα οπότε:

α. θα κινηθεί κυκλικά
β. θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά
γ. θα παραμείνει ακίνητο
δ. θα εκτελέσει ελικοειδή κίνηση

2. Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας και της ορμής για ένα φορτίο που κινείται σε κυκλική τροχιά μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι:

α. σταθερή
β. μηδέν
γ. διπλάσια
δ. μηδέν για την ταχύτητα και διπλάσια για την ορμή.

3. Δύο σωματίδια $m_1 = m_2$ και $q_1 = q_2$ ρίχνονται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου με $\upsilon_1 > \upsilon_2$. Τότε:

α. και τα δύο σωματίδια θα εκτελέσουν κυκλικές τροχιές ίδιων ακτίνων
β. τα δύο σωματίδια θα διαγράψουν κύκλους διαφορετικών ακτίνων με $R_1 < R_2$
γ. τα σωματίδια θα διαγράψουν κυκλικές τροχιές με την ίδια περίοδο
δ. οι περίοδοι των σωματιδίων θα είναι διαφορετικές

4. Η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο σε κινούμενο φορτίο εξαρτάται από:

α. τη μάζα του
β. το λόγο $\frac{m}{|q|}$
γ. το φορτίο του σωματιδίου
δ. κανένα από τα παραπάνω

5. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

α. όταν ένα φορτίο κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε η διεύθυνση της ταχύτητας του σχηματίζει γωνία 90° με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου

β. δύο φορτία που διαγράφουν μέσα σε μαγνητικό πεδίο κυκλική τροχιά ίσων ακτίνων έχουν οπωσδήποτε ίσες ταχύτητες

γ. όταν φορτίο μπει κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου τότε θα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με τον ρόλο της κεντρομόλου να τον έχει η δύναμη Lorentz

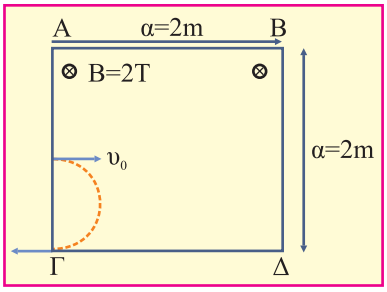
δ. όταν ένα φορτίο είναι ακίνητο τότε στο χώρο δεν υπάρχει ούτε μαγνητικό ούτε ηλεκτρικό πεδίο.

(Μονάδες 5)

Θέμα 2ο

1. Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου (m,q) που εισέρχεται με ταχύτητα υ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β κάθετα στις δυναμικές του γραμμές όπως επίσης και τη σχέση που δίνει την περίοδο του.

2. Για το παρακάτω φορτισμένο σωματίδιο που μπαίνει μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές βρείτε το πρόσημο του φορτίου και την ταχύτητα του φορτίου; (Δίνεται $\frac{m}{|q|}=1$).



3. Πρωτόνιο (m_1,q) και σωματίδιο α $(m_2=4m_1, q_2=2q)$ διαγράφουν κυκλικές τροχιές με ακτίνες R_1 και R_2 μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$.

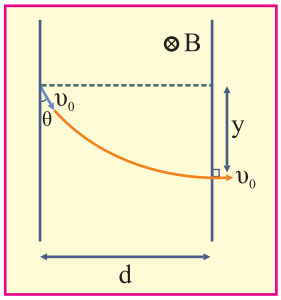
α. δείξτε ότι ο λόγος των ακτίνων είναι $\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{2}$ αν τα δύο σωματίδια έχουν ταχύτητα ίδιου μέτρου

β. ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι $\frac{K_1}{K_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$.

(Μονάδες 25)

Θέμα 3ο

Σωματίδιο με ειδικό φορτίο $\frac{q}{m}=4\cdot10^5\,C/kg$ μπαίνει με ταχύτητα υ_0 σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=1T$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές του όπως στο σχήμα. Το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται σε απόσταση $d=\sqrt{3}\cdot10^{-2}\,m$. Ο χρόνος παραμονής του σωματιδίου μέσα στο πεδίο είναι $t=\frac{1}{12\pi}\cdot10^{-5}s$ και βγαίνει κάθετα στο διαχωριστικό όριο. Να βρείτε:

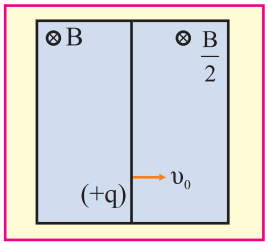


α. την περίοδο περιστροφής του σωματιδίου
β. την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς
γ. τη ταχύτητα υ_0 του σωματιδίου
δ. την απόκλιση (y) του σωματιδίου.

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο

Φορτισμένο σωματίδιο μπαίνει κάθετα σε χώρο όπου υπάρχουν δύο ομογενή μαγνητικά πεδία μεγάλης έκτασης όπως στο σχήμα.



α. Να σχεδιαστεί η τροχιά του σωματιδίου.
β. Να αποδείξετε ότι η κίνηση είναι περιοδική.
γ. Να βρείτε την περίοδο και το μήκος της τροχιάς του σωματιδίου σε χρόνο 2 περιόδων.

Δίνονται: $B=1{,}5\pi\,T$, $\frac{m}{q}=2\cdot10^{-8}\frac{kg}{C}$, $\upsilon_0=10^6\,m/s$.

(Μονάδες 25)

Κεφάλαιο 5ο

Επαγωγή - Εναλλασσόμενο

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο της επαγωγής - εναλλασσόμενο πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Πώς ορίζεται η μαγνητική ροή και τι εκφράζει.
- ✓ Ποιος είναι ο νόμος της επαγωγής.
- ✓ Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής οφείλεται στη μεταβολή της μαγνητικής ροής.
- ✓ Η σχέση $E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell$ ισχύει όταν η κίνηση είναι μεταφορική και η ταχύτητα του αγωγού η ένταση του πεδίου και ο αγωγός σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα .
- ✓ Με τον κανόνα του δεξιού χεριού μπορούμε να βρούμε πολικότητα, δύναμη Lorentz και δύναμη Laplace.
- ✓ Γενικά η ΗΕΔ υπολογίζεται:

  α. μέση τιμή $E_{\varepsilon\pi} = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

  β. στιγμιαία τιμή $E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell$ (μεταφορική)

  γ. $E_{\varepsilon\pi} = \dfrac{1}{2}B\omega\ell^2$ (περιστροφική)
- ✓ Για να υπάρχει δύναμη Laplace θα πρέπει ο αγωγός να βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο και να διαρρέεται από ρεύμα.
- ✓ Όταν ψάχνουμε οριακή ή μέγιστη ταχύτητα αγωγού να εφαρμόζουμε την συνθήκη $\Sigma F = 0$.
- ✓ Το πρόσημο της $E_{\varepsilon\pi}$ έχει σχέση με τη φορά του ρεύματος και μόνο.

- ✓ Αν υπάρχει αρχικά πηγή στο κύκλωμα έχουμε και δύναμη Laplace στον αγωγό μας, εξ' αρχής.
- ✓ Ότι μπορεί να έχουμε τάση από επαγωγή αλλά να μην έχουμε ρεύμα, αν το κύκλωμα είναι ανοιχτό.
- ✓ Πώς εφαρμόζουμε τον κανόνα του Lenz.
- ✓ Τι ονομάζουμε εναλλασσόμενη τάση.
- ✓ Πώς ορίζονται οι ενεργές τιμές τάσης και έντασης.
- ✓ Πώς υπολογίζεται η μέση ισχύς.
- ✓ Τα όργανα αμπερόμετρο και βαλτόμετρο μετρούν ενεργές τιμές στο εναλλασσόμενο ρεύμα.
- ✓ Νόμοι του Joule στο εναλλασσόμενο ρεύμα.
- ✓ Ο νόμος του Ohm στο εναλλασσόμενο ισχύει για πλάτη τάσης - έντασης $\left(I=\frac{V}{R}\right)$ για ενεργές τιμές $\left(I_{\varepsilon\nu}=\frac{V_{EN}}{R}\right)$ και για στιγμιαίες αν έχουμε μόνο αντίσταση $i=\frac{\upsilon}{R}$.
- ✓ Πώς ορίζεται η αμοιβαία επαγωγή και η αυτεπαγωγή και πότε εμφανίζεται η κάθε μία.
- ✓ Τι εκφράζει η αυτεπαγωγή
- ✓ Πώς υπολογίζεται η ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

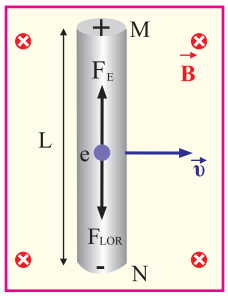
Επαγωγή - Εναλλασσόμενο: Τύποι - Βασικές έννοιες

ΗΕΔ σε κύκλωμα με N σπείρες:	$E_{\varepsilon\pi}=N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}$ ή $E_{\varepsilon\pi}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$
Ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται στο κύκλωμα κατά τη διάρκεια του φαινομένου, Νόμος Neumann:	$\Delta Q=N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{R}$

ΗΕΔ από επαγωγή σε ευθύγραμμο αγωγό, $\vec{\upsilon} \perp \vec{B} \perp \vec{\ell}$:	$E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell$
ΗΕΔ από επαγωγή λόγω στροφικής κίνησης αγωγού:	$E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$
ΗΕΔ από επαγωγή σε στρεφόμενο πλαίσιο:	$E_{\varepsilon\pi} = N\omega BA\eta\mu\omega t$
Εναλλασσόμενη τάση:	$\upsilon = V\eta\mu\omega t$
Εναλλασσόμενη ένταση ρεύματος:	$i = I\eta\mu\omega t$
Νόμος του Ohm:	$I = \frac{V}{R}$
Ενεργός τάση:	$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V}{\sqrt{2}}$
Ενεργός ένταση του ρεύματος:	$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I}{\sqrt{2}}$
Νόμος του Joule:	$Q = I_{\varepsilon\nu}^2 Rt$
Μέση ισχύς (P ή $\overline{P}$):	$\overline{P} = \frac{W}{T} = V_{\varepsilon\nu}I_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu}^2 R$
ΗΕΔ από αμοιβαία επαγωγή:	$E_{\varepsilon\pi} = -M\frac{\Delta i}{\Delta t}$
Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής: (το δευτερεύον πηνίο βρίσκεται μέσα στο πρωτεύον. Άξονας κοινός)	$M = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell}$
ΗΕΔ από αυτεπαγωγή:	$E_{\alpha\upsilon\tau} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$
Συντελεστής αυτεπαγωγής:	$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell}A$
Αποθηκευμένη ενέργεια πηνίου:	$U_\beta = \frac{1}{2}LI^2$

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Επαγωγική τάση στα άκρα ευθύγραμμου αγωγού που κινείται μεταφορικά σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.**

Απόδειξη



Ευθύγραμμος αγωγός μήκους L κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, μαγνητικής έντασης $\vec{B}$. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνιά του, συμμετέχοντας στην κίνηση του αγωγού, δέχονται δύναμη Lorentz $F_{LOR} = |q|\upsilon B$, που σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων, έχει φορά όπως στο σχήμα. Η δύναμη αυτή προκαλεί την μετακίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων προς το άκρο N, ενώ δημιουργεί έλλειμμα αρνητικού φορτίου (θετικό φορτίο) στο άκρο M. Τα φορτία αυτά σχηματίζουν στο χώρο του αγωγού ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$, με φορά από το M στο N. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δέχονται μια ακόμη δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο μέτρου $F_E = |q|E = |q|\frac{V_{MN}}{L}$ και αντίθετης φοράς της δύναμης Lorentz.

Καθώς τα φορτία συσσωρεύονται στις άκρες του αγωγού MN, αυξάνεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, άρα και οι δυνάμεις που προκαλεί. Κάποια στιγμή οι δύο δυνάμεις γίνονται αντίθετες, σταματά η επιπλέον συσσώρευση φορτίων στα άκρα του αγωγού και σταθεροποιείται η διαφορά δυναμικού στα άκρα του. Αυτή η διαφορά δυναμικού ονομάζεται **ΗΕΔ από επαγωγή** και υπολογίζεται ως εξής:

$$F_{LOR} = F_E \Rightarrow |q|\upsilon B = |q|\frac{E_{ΕΠ}}{L} \Rightarrow E_{ΕΠ} = B\upsilon L \quad (\Sigma)$$

→ Στη περίπτωση που η ένταση του ΜΠ δεν είναι κάθετη στο επίπεδο κίνη-

σης του αγωγού, την αναλύουμε και ασχολούμαστε μόνο με την κάθετη συνιστώσα (έστω B_y).

→ Στη περίπτωση που η ταχύτητα δεν είναι κάθετη στον αγωγό την αναλύουμε και ασχολούμαστε μόνο με την κάθετη συνιστώσα (έστω υ_y).

Έτσι η σχέση (Σ) γίνεται $E_{ΕΠ} = B_y \cdot \upsilon_y \cdot L$

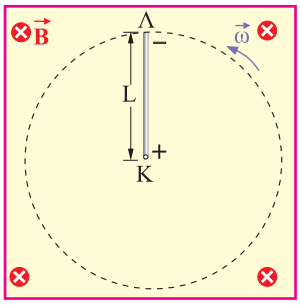
ΘΕΩΡΙΑ 2 **Επαγωγική τάση στα άκρα ευθύγραμμου αγωγού που περιστρέφεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.**

Απόδειξη

Αγωγός ΚΛ μήκους L στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από άξονα που περνά από το άκρο του Κ, με το επίπεδο περιστροφής του κάθετο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Αν ο αγωγός σε χρόνο Δt σαρώνει επιφάνεια δίσκου εμβαδού ΔΑ, δημιουργεί στα άκρα του ΗΕΔ από επαγωγή:

$$E_{ΕΠ} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = B\frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \text{ή}$$

$$E_{ΕΠ} = B\frac{\pi L^2}{T} = B\frac{\pi L^2}{\frac{2\pi}{\omega}} \quad \text{ή} \quad E_{ΕΠ} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$



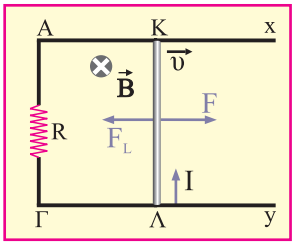
→ Στη περίπτωση που η ένταση του ΜΠ δεν είναι κάθετη στο επίπεδο κίνησης του αγωγού την αναλύουμε και ασχολούμαστε μόνο με την κάθετη συνιστώσα (έστω B_y).

→ Αν ο αγωγός περιστρέφεται με κέντρο όχι το άκρο του Κ αλλά κάποιο ενδιάμεσο σημείο Γ που τον χωρίζει σε τμήματα μήκους $L_1 = ΚΓ$ και $L_2 = ΛΓ$ (έστω $L_1 > L_2$) τότε: $E_{Eπ}^{ΚΛ} = E_{Eπ}^{ΚΓ} - E_{Eπ}^{ΓΛ} = \frac{1}{2}B\omega L_1^2 - \frac{1}{2}B\omega L_2^2 = \frac{1}{2}B\omega\left(L_1^2 - L_2^2\right)$

ΘΕΩΡΙΑ 3 Ο Κανόνας του Lenz ως εφαρμογή της αρχής διατήρησης και της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.

Τα επαγωγικά ρεύματα έχουν τέτοια φορά ώστε να αντιτίθενται στην αιτία που τα προκαλεί.

Απόδειξη



Αγωγός ΚΛ κινείται ισοταχώς μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μένοντας σε επαφή με τους ακίνητους αγωγούς Ax και Γy. Έστω ότι οι τριβές είναι αμελητέες. Στα άκρα του αγωγού εμφανίζεται $E_{ΕΠ} = B\upsilon\ell$ και το κύκλωμα διαρρέεται από $I_{ΕΠ} = \dfrac{B\upsilon\ell}{R}$.

Σε χρόνο Δt θα παράγεται λόγω φαινομένου Joule θερμότητα $Q = I_{ΕΠ}^2 \cdot R \cdot \Delta t = \dfrac{B^2\upsilon^2\ell^2}{R} \cdot \Delta t \quad (1)$. Για να παραμένει σταθερή η ταχύτητα του αγωγού πρέπει να ασκούμε εξωτερική δύναμη F αντίθετη της δύναμης Laplace:

$$F = BI_{ΕΠ}\ell = \frac{B^2\upsilon\ell^2}{R}.$$

Στο χρόνο Δt παράγουμε έργο: $W = F \cdot \Delta x = F \cdot \upsilon \cdot \Delta t = \dfrac{B^2\upsilon^2\ell^2}{R} \cdot \Delta t \quad (2)$.

Από (1), (2) παρατηρούμε ότι το προσφερόμενο έργο είναι ίσο με τη παραγόμενη θερμότητα.

ΘΕΩΡΙΑ 4 Υπολογισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής L, πηνίου μεγάλου μήκους ℓ, με N σπείρες και σιδηροπυρήνα μαγνητικής διαπερατότητας μ.

Απόδειξη

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι: $B = \mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot i$, όπου $n = N/\ell$. Άρα η μαγνητική ροή που περνάει μέσα από κάθε μια σπείρα, εμβαδού A, είναι: $\Phi = B \cdot A$ ή $\Phi = \mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot A \cdot i$

Αντικαθιστούμε στον νόμο της επαγωγής:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\varepsilon\pi} = -N \cdot \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -N \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \dfrac{N}{\ell} \cdot A \cdot \dfrac{\Delta i}{\Delta t} \\ E_{\varepsilon\pi} = -L \cdot \dfrac{\Delta i}{\Delta t} \end{array}\right\} L = \mu \cdot \mu_0 \dfrac{N^2}{\ell} A$$

ΘΕΩΡΙΑ 5 Υπολογισμός του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής Μ.

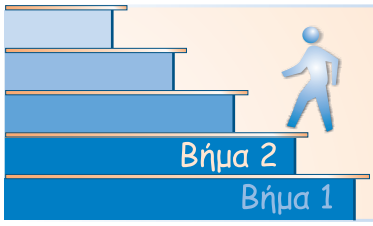
Απόδειξη

Το μαγνητικό πεδίο στην κεντρική περιοχή του πρωτεύοντος πηνίου δίνεται από την σχέση: $B_{(1)} = \mu \cdot \mu_0 n_1 \cdot i$

Αν το δευτερεύον πηνίο είναι έτσι ώστε να έχει κοινό άξονα με το πρωτεύον, να το περικλείει ώστε να περνούν όλες οι δυναμικές γραμμές από μέσα του και ταυτόχρονα να βρίσκεται στην κεντρική περιοχή του πρωτεύοντος ώστε να ισχύει η προηγούμενη σχέση, η μαγνητική ροή που θα περνάει από κάθε σπείρα του είναι: $\Phi_{(2)} = B_1 \cdot A = \mu_0 n_1 \cdot i \cdot A$

Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο δευτερεύον πηνίο είναι:

$$\left.\begin{array}{r} E_{\varepsilon\pi} = -N_2 \dfrac{\Delta\Phi_{(2)}}{\Delta t} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = N_2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot A \cdot \dfrac{\Delta i_{(1)}}{\Delta t} \\ E_{\varepsilon\pi} = -M \dfrac{\Delta i}{\Delta t} \end{array}\right\} M = \mu \cdot \mu_0 \cdot N_2 \cdot A \cdot n_1$$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.212: Ερωτήσεις 5.6, 5.12, 5.16, 5.21, 5.24

σ.σ. 219 - 220: Ασκήσεις 5.41, 5.42, 5.43

σ.σ. 223 - 227: Προβλήματα 5.60, 5.61, 5.62, 5.63, 5.64, 5.65, 5.66, 5.68, 5.69

Β. Από τα Βιλιομαθήματα
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ.σ. 143 - 180: Τα παραδείγματα 5.1, 5.2, 5.5, 5.8, 5.18, 5.21

σ.σ. 195 - 199: Τα παραδείγματα 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.27

σ.σ. 214 - 218: Τα παραδείγματα 5.29, 5.30, 5.31, 5.33, 5.34

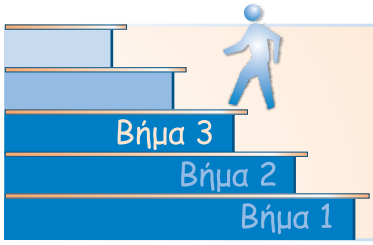
σ. 189: Ξεχωριστό θέμα 1

σ. 225: Ξεχωριστό θέμα 1

σ.σ. 185 - 189: Ασκήσεις 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.13

σ.σ. 202 - 205: Ασκήσεις 5.14, 5.21

σ.σ. 221 - 225: Ασκήσεις 5.24, 5.26



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Ευθύγραμμος αγωγός μήκους $L = 1m$ μάζας $m = 100g$, αντίστασης $R_1 = 4\Omega$, γλυστρά χωρίς τριβή σε δύο κατακόρυφους μεταλλικούς στύλους, αμελητέας ωμικής αντίστασης που ενώνονται στα πάνω άκρα τους με αντίσταση $R_2 = 6\Omega$. Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$ που είναι κάθετο στον αγωγό και στην ταχύτητά του. Αφήνουμε τον αγωγό ελεύθερο.**

α. Να περιγράψετε την κίνησή του.

β. Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητά του.

γ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα στις δύο αντιστάσεις όταν $\upsilon = \upsilon_{o\rho}$.

δ. Αν διένυσε ύψος $h = 9m$ μέχρι να αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα, να υπολογίσετε την θερμότητα που αναπτύχθηκε σε κάθε αντίσταση μέχρι τότε.

ε. Να υπολογίσετε το φορτίο που κινήθηκε στο κύκλωμα μέχρι $\upsilon = \upsilon_{o\rho}$.

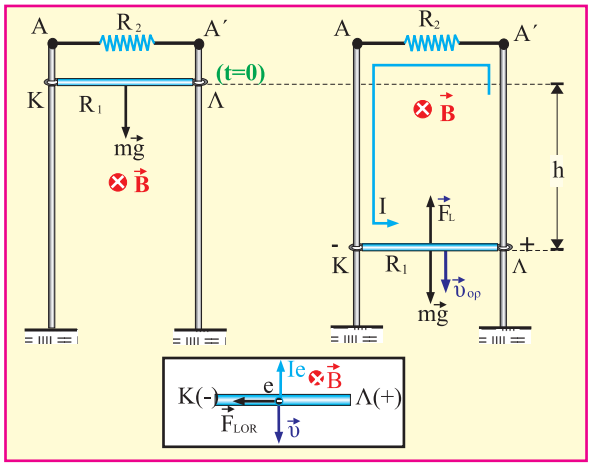
Δίνεται: $g = 10m/s^2$

Λύση:

α. Αρχικά επιταχύνεται υπό την επίδραση του βάρους του. Ακολούθως δημιουργείται $E_{E\Pi} = B\upsilon L$ που προκαλεί ηλεκτρικό ρεύμα $I = \dfrac{E_{E\Pi}}{R_1 + R_2} = \dfrac{B\upsilon L}{R_1 + R_2}$. Η δύναμη Laplace που δημιουργείται, λόγω του κανόνα του Lenz αντιτίθεται στο βάρος. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη (όχι ομαλά) με μειούμενο ρυθμό αύξησης της ταχύτητας γιατί η δύναμη Laplace αυξάνει συνεχώς.

β. $\upsilon = \upsilon_{o\rho} \Rightarrow \Sigma F = 0$ τότε $F_L = mg$ ή $BIL = mg$ ή $B\dfrac{B\upsilon_{o\rho}L}{R_1 + R_2}L = mg$ ή

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{mg(R_1 + R_2)}{B^2L^2} = 10\,m/s$$



γ. Όταν $\upsilon = \upsilon_{o\rho}$ η ένταση του ρεύματος έχει τιμή: $I = \dfrac{B\upsilon_{o\rho}L}{R_1 + R_2} = 1A$

Τότε: $P_1 = \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta t} = I^2R_1 = 4W$ και $P_2 = \dfrac{\Delta Q_2}{\Delta t} = I^2R_2 = 6W$

δ. Η δυναμική βαρυτική ενέργεια mgh μετατράπηκε σε κινητική και σε θερμότητα στις δύο αντιστάσεις.

Α.Δ.Ε: $mgh = \dfrac{1}{2}m\upsilon_{o\rho}^2 + Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 4J$ (1)

Επειδή οι αντιστάσεις R_1 και R_2 διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα

$\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\Sigma I^2R_1\Delta t}{\Sigma I^2R_2\Delta t} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{2}{3}$ (2). Από (1), (2) έχω $Q_2 = 2,4J$ και $Q_1 = 1,6J$

ε. Το φορτίο που κινήθηκε στο κύκλωμα είναι:

$$q = I\Delta t = \frac{E_{E\Pi}}{R_1 + R_2}\Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{R_1 + R_2} = \frac{B\cdot\Delta A}{R_1 + R_2} = \frac{BhL}{R_1 + R_2} = 0,9C$$

όπου $\Delta A = hL$ το εμβαδό που σάρωσε ο αγωγός κατά την κίνησή του.

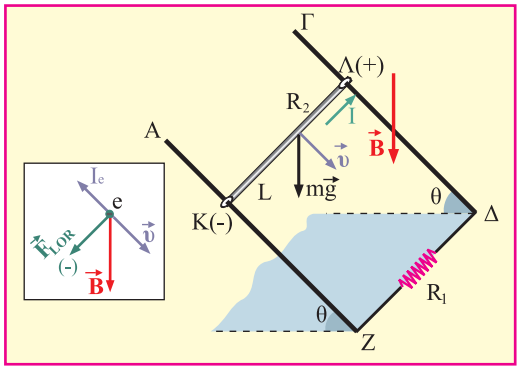
2. **Δύο παράλληλες μεταλλικές ράβδοι αμελητέας αντίστασης σχηματίζουν με τον ορίζοντα γωνία $\theta = 30^o$, συνδέονται στο κάτω άκρο τους με αντίσταση $R_1 = 1\Omega$ και απέχουν 1m. Από το πάνω άκρο των ράβδων αφήνουμε να ολισθήσει χωρίς τριβή κατά μήκος τους ένας πρισματικός αγωγός ΚΛ μάζας $m = 0,3kg$, μήκους $L = 1m$ και αντίστασης $R_2 = 1\Omega$. Ο αγωγός μετά από λίγο αποκτά σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\rho}$. Αν η διάταξη βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$ να υπολογίσετε:**

α. την οριακή ταχύτητα (μέγιστη)

β. την τάση στα άκρα του αγωγού όταν $\upsilon = \upsilon_{o\rho}$

γ. τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας όταν $\upsilon = \frac{\upsilon_{o\rho}}{2}$. Δίνεται: $g = 10m/s^2$.

Λύση:



α. Όταν $\upsilon = \upsilon_{o\rho} \Rightarrow \Sigma F = 0$ ή

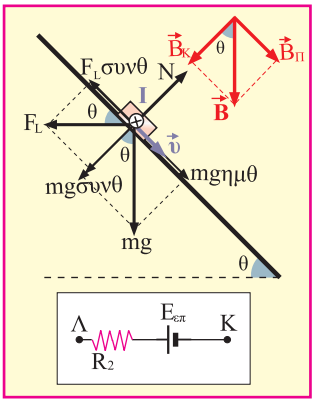
$F_L \sigma\upsilon\nu\theta = mg\eta\mu\theta$ ή

$BIL\sigma\upsilon\nu\theta = mg\eta\mu\theta$ ή

$$B\frac{E_{E\Pi}}{R_1 + R_2}L\sigma\upsilon\nu\theta = mg\eta\mu\theta \text{ ή}$$

$$B\frac{B\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \upsilon_{o\rho}L}{R_1 + R_2}L\sigma\upsilon\nu\theta = mg\eta\mu\theta \text{ ή}$$

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{mg\eta\mu\theta(R_1 + R_2)}{B^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\theta} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = 4m/s.$$



β. Όταν $\upsilon_{o\rho} = 4m/s$ τότε:

$$I = \frac{E_{E\Pi}}{R_1 + R_2} = \frac{B\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \upsilon_{o\rho}L}{R_1 + R_2} = \sqrt{3}A$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι η πολική τάση της πηγής $V_{\Lambda K} = V_{\Pi O\Lambda} = E_{E\Pi} - IR_2 \Rightarrow$

$$V_{\Lambda K} = B\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \upsilon_{o\rho}L - IR_2 \Rightarrow V_{\Lambda K} = \sqrt{3}\,Volt$$

γ. Όταν $\upsilon = \frac{\upsilon_{ορ}}{2} = 2\,m/s$ τότε:

$$I = \frac{E_{ΕΠ}}{R_1 + R_2} = \frac{Βσυνθ \cdot \upsilon \cdot L}{R_1 + R_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,A\,.$$

Επομένως η δύναμη Laplace είναι: $F_L = BIL = \frac{\sqrt{3}}{2}\,N$.

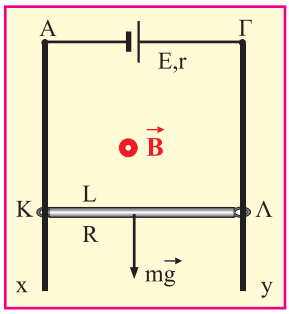
Από τον θεμ. Ν. Μηχ.: $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow mgημθ - F_L συνθ = m \cdot \alpha \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{mgημθ - F_L συνθ}{m} = 2{,}5\,m/s^2 = \frac{d\upsilon}{dt}$$ (ρυθμός μεταβολής ταχύτητας).

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{W_{ολ}}{\Delta t} = \frac{F_{ολ}\Delta x}{\Delta t} = F_{ολ}\upsilon = (mgημθ - F_L συνθ)\upsilon \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 1{,}5\,W$$

3. Οι αγωγοί Αx και Γy του σχήματος είναι κατακόρυφοι και βρίσκονται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ με φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. Η πηγή έχει ΗΕΔ $E = 10V$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$. Ο αγωγός ΚΛ έχει μάζα $m = 1kg$, μήκος $L = 1m$ και αντίσταση $R = 1\Omega$ και μπορεί να κινείται παραμένοντας οριζόντιος και σε επαφή με τους αγωγούς Αx και Γy. Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$.



Αρχικά κρατάμε ακίνητο τον αγωγό και όταν τον αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί παρατηρούμε ότι ισορροπεί.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

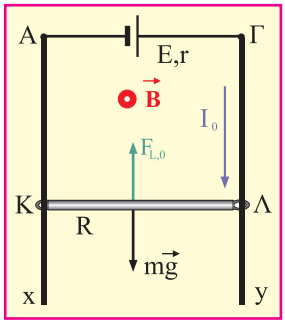
β. Αν διπλασιάσουμε το μέτρο της έντασης του πεδίου διατηρώντας την κατεύθυνσή του να εξηγήσετε, γιατί η ράβδος ΚΛ θα αποκτήσει σταθερή (οριακή) ταχύτητα και να την υπολογίσετε.

γ. Αν η πηγή με ΗΕΔ Ε έχει αντίθετη πολικότητα να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου ΚΛ τη στιγμή που το ρεύμα αλλάζει φορά στο κύκλωμα.

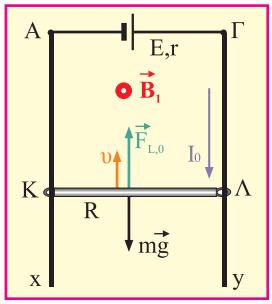
δ. Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος ΚΛ όταν η πολικότητα της πηγής είναι αντίθετη.

ε. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την ταχύτητα της ράβδου ΚΛ, στην περίπτωση που η ΗΕΔ Ε της πηγής έχει αλλαγμένη πολικότητα.

Λύση:



α. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ράβδος έχει μηδενική ταχύτητα και ένα ρεύμα έντασης $I_0 = \frac{E}{R+r}$ διαρρέει το κύκλωμα άρα και την ράβδο ΚΛ. Το ρεύμα αυτό γίνεται αιτία να δεχθεί η ΚΛ δύναμη Laplace η κατεύθυνση της οποίας φαίνεται στο σχήμα. Είναι $F_{L_0} = BI_0L$ επειδή η ράβδος ΚΛ ισορροπεί $\Sigma F = 0$ ή $F_{L_0} = mg$ ή $B\frac{E}{R+r}L = mg$ ή $B = 2T$ (1)



β. Όταν $B_1 = 2B$. $F'_{L_0} = B_1\left(\frac{E}{R+r}\right)L = 20N$. Αλλά το βάρος είναι $mg = 10N$ άρα $F'_{L_0} > mg$ και η ράβδος θα κινηθεί προς τα πάνω. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να αναπτυχθεί στην ΚΛ επαγωγική ΗΕΔ της οποίας η πολικότητα φαίνεται στο σχήμα.
Μετά την εμφάνιση της $E_{ΕΠ}$ το ρεύμα στο κύκλωμα έχει ένταση $I_1 = \frac{E - E_{ΕΠ}}{R+r} = \frac{E - B\upsilon L}{R+r}$ ή $I_1 = \frac{10 - 4\cdot\upsilon\cdot 1}{1+1}$ ή $I_1 = \frac{10-4\upsilon}{2}$ ή $I_1 = 5 - 2\upsilon$ (S.I) (2).

Όταν το κύκλωμα διαρρέεται από το ρεύμα έντασης I_1 η δύναμη Laplace έχει μέτρο:

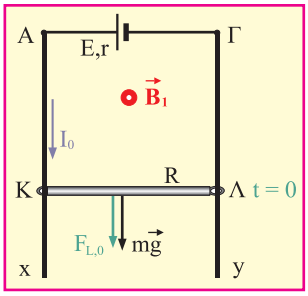
$F_L = BIL = 4(5-2\upsilon)$ (S.I) ή $F_{L_1} = 20 - 8\upsilon$ (S.I)

Έτσι για την συνισταμένη των δυνάμεων ισχύει $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{L_1} + m\vec{g}$ ή $\Sigma F = F_{L_1} - mg$ ή $\Sigma F = (20-8\upsilon) - 10$ (S.I) ή $\Sigma F = 10 - 8\upsilon$ (S.I) (3). Καθώς η $\vec{\upsilon}$ αυξάνεται, η $\Sigma\vec{F}$ μειώνεται και όταν η $\Sigma\vec{F}$ μηδενιστεί, η ταχύτητα θα αποκτήσει οριακή τιμή $\upsilon_{ορ}$ και θα ισχύει:

$0 = 10 - 8\upsilon_{ορ}$ ή $\upsilon_{ορ} = 1,25\,m/s$ (4)

γ. Αν αλλάξει η πολικότητα της Ε.

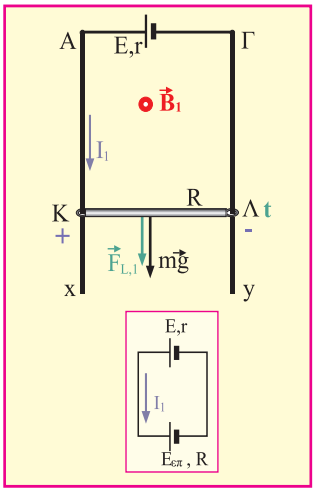
Την $t_o = 0$ η ράβδος ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα με φορά αυτή του σχήματος.
Η ράβδος ΚΛ δέχεται δύναμη Laplace της οποίας η κατεύθυνση φαίνεται στο σχήμα.
Έτσι η ράβδος επιταχύνεται συνεχώς και λόγω της κίνησής της αναπτύσσεται σ' αυτήν επαγωγική ΗΕΔ της οποίας η πολικότητα φαίνεται στο σχήμα.

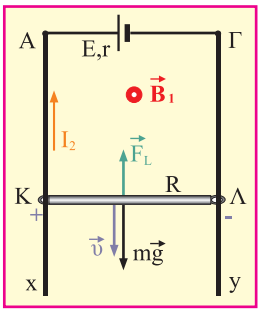


Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα έχει ένταση: $I_1 = \dfrac{E - E_{ΕΠ}}{R + r}$ ή $I_1 = \dfrac{E - Bυ L}{R + r}$

ή $I_1 = 5 - 2υ$ (S.I) (5) όταν $I_1 = 0$ τότε $υ = 2,5\,m/s$ ενώ $E_{ΕΠ} = B_1 υ \ell = 10\,V$

καθώς $E = E_{ΕΠ}$ εκείνη τη στιγμή μηδενίζεται η $\vec{F}_L$ αλλά λόγω του βάρους η ράβδος συνεχίζει να επιταχύνεται προς τα κάτω οπότε η ταχύτητα γίνεται μεγαλύτερη από $υ = 2,5\,m/s$ και η $E_{ΕΠ} > E$. Έτσι το ρεύμα αλλάζει φορά με αποτέλεσμα να αλλάξει φορά και η $\vec{F}_L$.





δ. Η συνισταμένη δύναμη γράφεται: $\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_L \Rightarrow \Sigma F = mg - B_1 I_2 L$ με

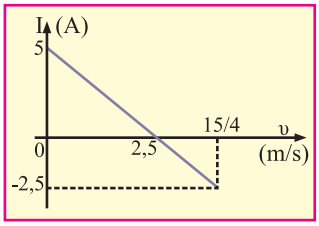
$I_2 = \dfrac{E_{ΕΠ} - E}{R + r} = \dfrac{Bυ L - E}{R + r}$. Άρα $\Sigma F = mg - B_1 L \dfrac{Bυ L - E}{R + r}$. Καθώς η $\vec{υ}$ αυξάνεται η ΣF μειώνεται και όταν $\Sigma F = 0$ η ράβδος αποκτά σταθερή οριακή ταχύτητα

και ισχύει $B_1 L \dfrac{B_1 υ_{op} L - E}{R + r} = mg$ ή $υ_{op} = \dfrac{mg(R + r)}{BI^2L^2} + \dfrac{E}{B_1 L}$ ή $υ_{op} = 3,75\,m/s$.

ε. Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος θα στηριχθούμε στην έκφραση της έντασης όταν η $E_{ΕΠ} > E$.

Όταν η $E_{ΕΠ} > E$ το ρεύμα θα προκύπτει αρνητικό. Από τη σχέση (5):

$I = 5 - 2\upsilon \qquad 0 \le \upsilon \le \upsilon_{ορ}$.



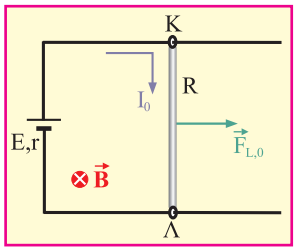
4. Δύο οριζόντιοι παράλληλοι αγωγοί Αx και Γy αμελητέας ωμικής αντίστασης, απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση $L = 1m$. Μεταξύ των άκρων Α και Γ συνδέεται, μέσω ενός διακόπτη δ, πηγή με ΗΕΔ $E = 8V$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$. Αγωγός μήκους $L = 1m$, μάζας $m = 0,4kg$ και ωμικής αντίστασης $R = 3\Omega$ έχει τα άκρα του Κ, Λ πάνω σε αυτούς. Η όλη διάταξη βρίσκεται σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$. Αρχικά ο αγωγός ΚΛ είναι ακίνητος και βρίσκεται σε μικρή απόσταση από την πηγή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης και ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται χωρίς τριβές απομακρυνόμενος από την πηγή. Μετά από λίγο αποκτά σταθερή οριακή ταχύτητα. Ο αγωγός έχει επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 3m/s^2$ κάποια χρονική στιγμή t πριν αποκτήσει σταθερή ταχύτητα. Ζητούνται:

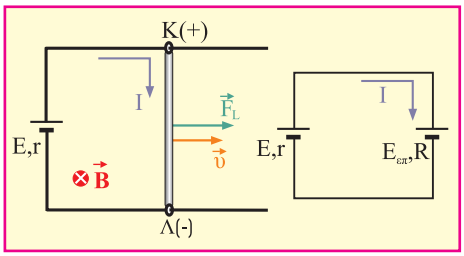
α. Να υπολογιστεί η σταθερή ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός.

β. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης Laplace από την χρονική στιγμή t μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο αγωγός αποκτά οριακή ταχύτητα.

Λύση:

α. Την χρονική στιγμή $t = 0$: $I_o = \dfrac{E}{R + r} = 2A$. Ο αγωγός αρχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά υπό την επίδραση της $F_{L_0} = BI_0L = 2N$. Δημιουργείται τότε στα άκρα του αγωγού ΚΛ ΗΕΔ από επαγωγή $E_{ΕΠ} = B\upsilon L$. Οι δύο πηγές είναι σε αντίθεση και το ρεύμα: $I = \dfrac{E - E_{ΕΠ}}{R + r} = \dfrac{E - B\upsilon L}{R + r}$: μειώνεται γιατί η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ αυξάνεται. Όταν $E = B\upsilon L$ τότε $I = 0$ και ο αγωγός αποκτά οριακή ταχύτητα $\upsilon_{ορ} = \dfrac{E}{BL} = 8m/s$.





β. Την χρονική στιγμή t, όπου ο αγωγός έχει στιγμιαία επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 3\,m/s^2$, από τον θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \quad ή \quad F_L = m\alpha \quad ή \quad BIL = m\alpha \quad ή \quad BL\frac{(E - B\upsilon_1 L)}{R + r} = m\alpha \quad ή$$

$$\upsilon_1 = \frac{E}{BL} - \frac{m\alpha(R + r)}{B^2L^2} \quad ή \quad \upsilon_1 = 3,2\,m/s\,.$$

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από την χρονική στιγμή t μέχρι να αποκτήσει ο αγωγός σταθερή ταχύτητα: $\frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W_{F_L}$ ή $W_{F_L} = 10,752\,J$.

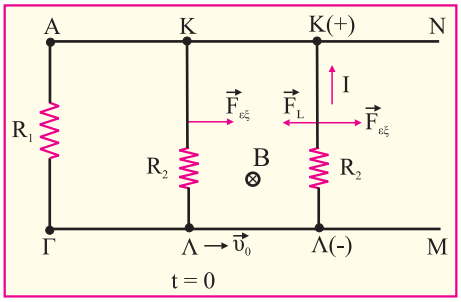
5. Τα άκρα Α, Γ δύο παραλλήλων οριζοντίων αγωγών ΑΝ και ΓΜ, χωρίς ώμική αντίσταση συνδέονται με αντίσταση $R_1 = 5\Omega$. Πάνω στο επίπεδο των ΑΝ και ΓΜ ολισθαίνει χωρίς τριβές, αγωγός ΚΛ μήκους $\ell = 1m$ μάζας 5kgr και αντίστασης $R_2 = 5\Omega$. Το σύστημα των αγωγών βρίσκεται σε Ο.Μ.Π με $B = 2T$ κάθετη στο επίπεδο τους και φορά προς τη σελίδα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο αγωγός ΚΛ έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 10m/s$ παράλληλη στους αγωγούς ΓΜ, ΑΝ και ασκείται σ' αυτόν εξωτερική δύναμη $\vec{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\upsilon_0}$. Έτσι ο (ΚΛ) αποκτά σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2m/s^2$, $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\upsilon_0}$.

α. Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής.

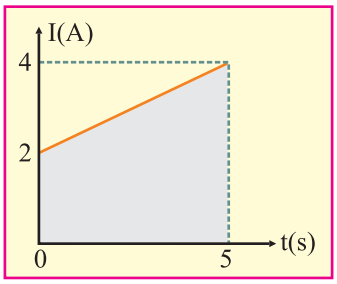
β. Να βρεθεί το φορτίο που περνά απ'την ΚΛ σε χρόνο 5s.

γ. Να βρεθεί η F_L και η $F_{\varepsilon\xi}$ την $t = 5s$.

Λύση:



α. Εφαρμόζουμε τον Ν. Ohm για κλειστό κύκλωμα:



$$I=\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1+R_2}=\frac{B\upsilon\ell}{R_1+R_2}=\frac{B\cdot(\upsilon_0+\alpha t)}{R_1+R_2}\Rightarrow$$

$$I=\frac{2(10+2t)}{10}\Rightarrow I=2+0,4t\ \ (S.I)$$

β. Το φορτίο βρίσκεται απ' το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου στο $I-t$

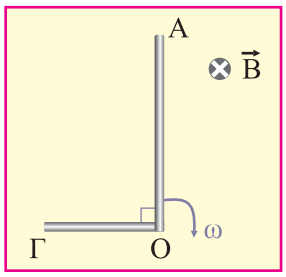
$$q=\frac{2+4}{2}\cdot 5C=15C$$

γ. Την $t=5s$, $I=4A$ άρα $F_L=BI\ell=2\cdot 4\cdot 1N=8N$

$$\Sigma F=m\cdot\alpha\Rightarrow F_{\varepsilon\xi}-F_L=m\cdot\alpha\Rightarrow F_{\varepsilon\xi}=F_L+m\cdot\alpha$$

$$F_{\varepsilon\xi}=(8+5\cdot 2)N=18N$$

6. **Μεταλλικός αγωγός σε σχήμα ορθής γωνίας με πλευρές $OA=\ell_1=2m$ και $O\Gamma=\ell_2=1m$, περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται απ' την ορθή κορυφή Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=5rad/s$. Το επίπεδο του αγωγού είναι οριζόντιο ενώ η περιστροφή γίνεται μέσα σε Ο.Μ.Π. έντασης $B=1T$ με κατεύθυνση κατακόρυφη όπως φαίνεται στο σχήμα της άσκησης.**



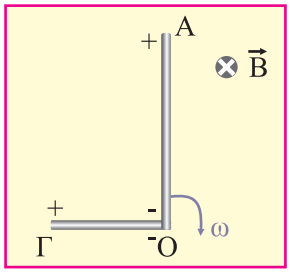
Να βρεθούν:

α. οι πολικότητες των σημείων Α και Γ

β. οι Η.Ε.Δ. από επαγωγή που αναπτύσσονται στα άκρα κάθε πλευράς

γ. οι διαφορές δυναμικού στα άκρα κάθε πλευράς
δ. η τάση που αναπτύσσεται ανάμεσα στα Α, Γ.

Λύση:



α. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ΟΑ δέχονται δύναμη Lorentz απ' το πεδίο και κινούνται προς το Ο. Ομοίως και τα φορτία της ΟΓ. Άρα τα Α και Γ φορτίζονται θετικά.

β. $E_{AO} = \frac{1}{2}B\omega\ell_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot 2^2\,V \Rightarrow E_{AO} = 10\,V$

$E_{\Gamma O} = \frac{1}{2}B\omega\ell_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot 1^2\,V \Rightarrow \quad E_{\Gamma O} = 2{,}5\,V$

γ. Οι τάσεις V_{AO}, $V_{\Gamma O}$ είναι επίσης $V_{AO} = 10\,V$, $V_{\Gamma O} = 2{,}5\,V$ γιατί οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ δεν αποτελούν τμήμα κλειστού κυκλώματος, άρα δεν διαρρέονται από ρεύμα και οι Η.Ε.Δ. είναι ίσες με τις τάσεις.

δ. $V_{A\Gamma} = E_{AO} - E_{\Gamma O} = 7{,}5\,V$

7. Α. Ένα ορθογώνιο πλαίσιο αποτελείται από 500 σπείρες εμβαδού $6dm^2$ η καθεμία και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 400\,rad/s$ γύρω από οριζόντιο άξονα μέσα σε κατακόρυφο Ο.Μ.Π. έντασης $B = 2{,}5\cdot 10^{-2}\,T$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το επίπεδο του πλαισίου ήταν κάθετο στο μαγνητικό πεδίο να βρείτε:

α. την εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης που δημιουργείται στα άκρα του πλαισίου.

β. την τιμή της τάσης τη χρονική στιγμή $\frac{\pi}{800}s$.

γ. την χρονική στιγμή που η τάση γίνεται για πρώτη φορά ίση με την ενεργό τιμή της

δ. την στιγμιαία ένταση που διαρρέει αντιστάτη $R = 3K\Omega$ στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται η πιο πάνω εναλλασσόμενη τάση.

Β. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις στιγμιαίας τάσης και έντασης ως προς το χρόνο.

Λύση:

Α.α. Το πλάτος της εν/νης τάσης που δημιουργείται στα άκρα του πλαισίου είναι:

$$V = N \cdot \omega B \cdot A = 5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2}\,V \Rightarrow V = 300\,V \cdot$$

Άρα η στιγμιαία τάση είναι: $\upsilon = V \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow \upsilon = 300 \cdot \eta\mu 400t$ (S.I.)

β. $\upsilon = 300 \cdot \eta\mu 400 \dfrac{\pi}{800} V \Rightarrow \upsilon = 300 \cdot \eta\mu \dfrac{\pi}{2} V \Rightarrow \upsilon = 300 \cdot 1V \Rightarrow \upsilon = 300\,V$

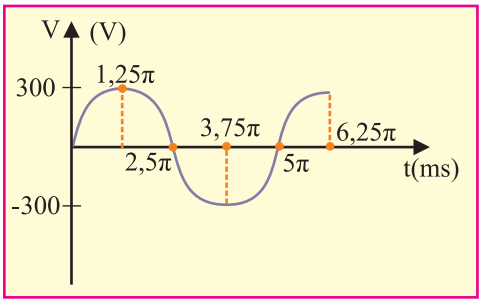
γ. $\left.\begin{array}{l} \upsilon = V_{\varepsilon\nu} \Rightarrow V \cdot \eta\mu\omega t_1 = V_{\varepsilon\nu} \\ \text{επειδή} \quad V_{\varepsilon\nu} = \dfrac{V}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow V \cdot \eta\mu\omega t_1 = \dfrac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

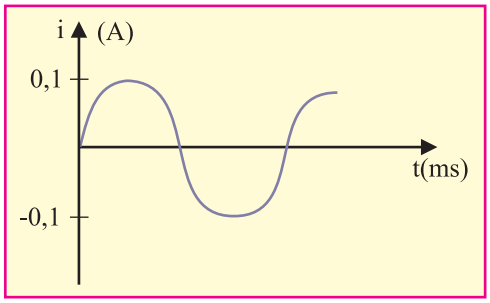
$$\Rightarrow \eta\mu\omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4 \cdot \omega} = \frac{\pi}{1600} s$$

δ. επειδή για την περίπτωση αντίστασης ισχύει ο νόμος του Ohm όπως και στο συνεχές, $i = \dfrac{\upsilon}{R} \Rightarrow i = 0{,}1 \cdot \eta\mu 400t$ (A).

Β. Για τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων θα χρειαστεί η τιμή της περιόδου:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{400} s \Rightarrow T = \frac{\pi}{200} s \quad \text{ή} \quad T = \frac{5\pi}{1000} s \quad \text{δηλαδή} \quad T = 5\pi ms.$$





8. **Το πηνίο του κυκλώματος έχει $N = 500$ σπείρες ενώ το μήκος του είναι $\ell = 10cm$ και το εμβαδόν κάθε μιας απ'αυτές είναι $\dfrac{10}{\pi} cm^2$. Η Η.Ε.Δ. της πηγής είναι $E = 20V$ η εσωτερική αντίστασή της $r = 2\Omega$ ενώ η αντίσταση R του αντιστάτη ίση με 3Ω.**

α. Ποια η τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής;

β. Ποια η μέγιστη ένταση ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα;

γ. Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος όταν η τιμή της είναι το 80% της μέγιστης;

δ. Πόση ενέργεια αποταμιεύεται τελικά στο ιδανικό πηνίο;

Δίνεται: $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{T \cdot m}{A}$

Λύση:

α. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής δίνεται από τον τύπο: $L = \mu_o \cdot \dfrac{N^2}{\ell} \cdot A$ όπου N το πλήθος των σπειρών, ℓ το μήκος του πηνίου και A το εμβαδόν κάθε σπείρας $L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \dfrac{\left(5 \cdot 10^2\right)^2}{10^{-1}} \cdot \dfrac{10}{\pi} \cdot 10^{-4} H \Rightarrow L = 10^{-3} H$ ή $L = 1mH$

β. Η μέγιστη ένταση ρεύματος είναι ίση με:

$$I_{max} = \frac{E}{R_{OΛ}} = \frac{E}{R+r} = \frac{20}{3+2} A = 4A \Rightarrow I_{max} = 4A$$

γ. Όταν $I = 0,8 I_{max} \Rightarrow I = 3,2A$ έχουμε για το κλειστό κύκλωμα από διατήρηση ενέργειας

$$P_{ηλ} = P_L + P_R + P_r \Rightarrow E \cdot I = E_{αυτ} \cdot I + I^2 \cdot (R+r) \Rightarrow$$

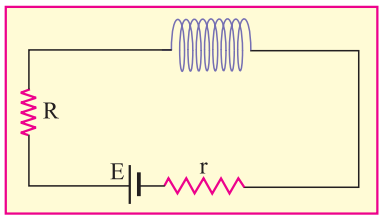
$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} + I \cdot (R+r) \Rightarrow L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = E - I(R+r) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{E - I \cdot (R+r)}{L} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{20 - 3,2 \cdot 5}{10^{-3}} A/s \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = 4 \cdot 10^3 A/s$$

δ. Η ενέργεια που αποταμιεύεται στο Μ.Π. του πηνίου είναι:

$$U_{max} = \frac{1}{2} L \cdot I_{max}^2 \Rightarrow U_{max} = \frac{1}{2} 10^{-3} \cdot 4^2 J \Rightarrow U_{max} = 8mJ$$

9. **Πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 10^{-1} H$ συνδέεται σε σειρά με ωμική αντίσταση $R = 20\Omega$ και πηγή με ΗΕΔ $E = 60V$ και $r = 0$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη.**



α. Βρείτε την ένταση του ρεύματος μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα από το κλείσιμο του διακόπτη.

β. Την τάση στα άκρα της αντίστασης R όταν το ρεύμα έχει τιμή $i = 1A$.

γ. Την τάση ($E_{αυτ}$) στα άκρα του πηνίου και τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος όταν $i = 1A$.

Λύση:

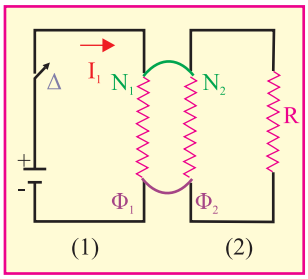
α. Λόγω της ύπαρξης του πηνίου το ρεύμα θα καθυστερήσει μέχρι να πάρει την μέγιστη τιμή του. Μετά την σταθεροποίηση της έντασης του ρεύματος δεν θα έχουμε εξάρτηση της τιμής από την ύπαρξη του πηνίου: $i = \frac{E}{R} = 3A$.

β. Από τον νόμο Ohm έχουμε: $V_R = i \cdot R = 1 \cdot 20V = 20V$.

γ. Εκείνη την χρονική στιγμή ισχύει: $E_{αυτ} = E - V_R = 60V - 20V = 40V$ και

$$E_{αυτ} = L\frac{|\Delta i|}{\Delta t} \Rightarrow \frac{|\Delta i|}{\Delta t} = \frac{40}{10^{-1}} A/s = 400A/s.$$

10. Στο διπλανό κύκλωμα το πηνίο (1) διαρρέεται από ρεύμα $I_1 = 10A$ το οποίο όταν ανοίξουμε τον διακόπτη (Δ) μηδενίζεται σε χρόνο $\Delta t = 0,1s$. Εάν $N_1 = 100$ σπείρες, $N_2 = 50$ σπείρες και $\Phi_2 = 0,8\Phi_1$, να βρείτε:



α. την μέση τιμή της τάσης από αμοιβαία επαγωγή στο πηνίο (2)

β. τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής

γ. το ηλεκτρικό φορτίο που θα περάσει συνολικά από μια διατομή του πηνίου $Π_2$.

Δίνεται: $R = 10Ω$, $\ell_1 = 25cm$, $A_1 = \frac{10}{\pi} cm^2$.

Λύση:

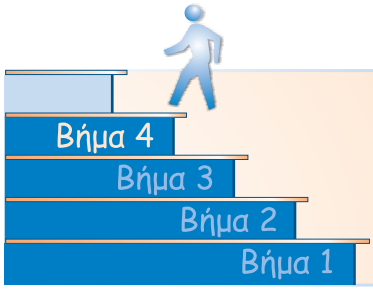
α. Είναι: $B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} \cdot I_1$

Από τον νόμο επαγωγής του Faraday έχουμε:

$$E_2 = N_2 \frac{|\Delta\Phi_2|}{\Delta t} = \frac{N_2 \cdot 0,8\Phi_1}{\Delta t} = \frac{0,8B_1 \cdot A_1 \cdot N_2}{\Delta t} \Rightarrow E_2 = 6,4 \cdot 10^{-4} V$$

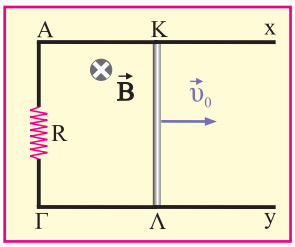
β. Από $E_2 = M\frac{|\Delta I|}{\Delta t} \Rightarrow M = 6,4\mu H$

γ. Το φορτίο υπολογίζεται $q_2 = I_2 \cdot \Delta t = \frac{E_2}{R} \cdot \Delta t \Rightarrow q_2 = 6,4\mu C$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ μήκους $\ell = 1m$, μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος οριζόντιων και παράλληλων μεταξύ τους αγωγών A_x, $Γ_y$ που απέχουν 1m, ώστε να είναι πάντα κάθετος σ' αυτούς. Τα άκρα Α και Γ των A_x, $Γ_y$ συνδέονται μέσω αντίστασης $R = 4Ω$ και έτσι δημιουργείται ένα πλαίσιο ΑΚΛΓ ορθογωνίου σχήματος. Το επίπεδο των αγωγών είναι οριζόντιο, βρίσκεται δε μέσα σε Ο.Μ.Π. έντασης $B = 2T$ κατακόρυφης με φορά προς τη σελίδα. Εκτοξεύω τον ΚΛ με οριζόντια ταχύτητα $υ_0$ παράλληλη προς τους A_x, $Γ_y$ και μέτρου 10m/s. Αν οι A_x, $Γ_y$ δεν παρουσιάζουν αντίσταση ενώ ο ΚΛ έχει $R' = 10Ω$ και μάζα $m = 500g$.



Α. Δείξτε ότι εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.

Β. Βρείτε:

α. την Η.Ε.Δ. που δημιουργείται αρχικά σ' αυτόν

β. τη διαφορά δυναμικού $V_{ΚΛ}$ εκείνη τη στιγμή

γ. την Η.Ε.Δ. όταν η ένταση του ρεύματος είναι η μισή της αρχικής

δ. το ρυθμό μετατροπής της κινητικής ενέργειας σε θερμότητα εκείνη τη στιγμή.

Γ. Τη θερμότητα που αναπτύσσεται σε κάθε αντίσταση μέχρι να σταματήσει ο ΚΛ.

.....

.....

.....

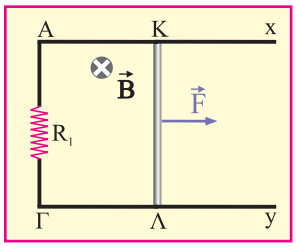
.....

.....

.....

.....

2. Η ράβδος ΚΛ μήκους $\ell = 1m$ και μάζας $m = 2kg$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, έχοντας συνεχώς τα άκρα της Κ και Λ σε επαφή με τους αγωγούς Αx, Γy που δεν έχουν αντίσταση. Τα άκρα Α και Γ συνδέονται με αντιστάτη αντίστασης $R_1 = 3\Omega$ και όλο το κύκλωμα έχει το επίπεδό του κάθετο σε Ο.Μ.Π. έντασης $B = 2T$.



Ασκούμε στην ΚΛ δύναμη F παράλληλη προς τους Αx, Γy και τέτοιας τιμής ώστε αυτή να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4m/s^2$.

α. Ποιά η εξίσωση της έντασης του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου αν η ΚΛ έχει αντίσταση $R = 1\Omega$;

β. Πόσο είναι το φορτίο που θα έχει κυκλοφορήσει στο κύκλωμα μέχρι τη στιγμή $t = 3s$;

γ. Ποιά η εξίσωση της δύναμης σε συνάρτηση με τον χρόνο;

δ. Ποιά η τάση στα άκρα της ΚΛ τη χρονική στιγμή $t = 4s$;

.....

.....

.....

.....

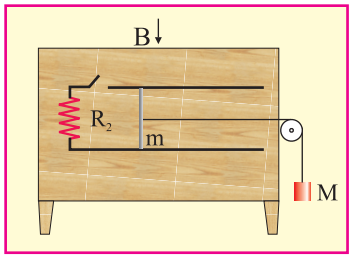
.....

.....

.....

.....

3. Αγώγιμη ράβδος μήκους $\ell = 0,5m$ αντίστασης $R_1 = 15\Omega$ και μάζας $m = 0,2kg$ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε παράλληλους οριζόντιους αγωγούς αμελητέας αντίστασης, τα άκρα των οποίων συνδέονται με αντίσταση $R_2 = 25\Omega$. Η διάταξη βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μα-



γνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 0,2T$. Στο μέσον της ράβδου είναι στερεωμένο το ένα άκρο νήματος στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε στερεώσει σώμα μάζας $M = 0,8kg$. Το νήμα διέρχεται από τροχαλία αμελητέας μάζας. Αφήνουμε το σώμα μάζας M να κινηθεί.

Α. Να βρείτε την ΗΕΔ από επαγωγή στη ράβδο μετά από $\Delta t = 2s$.

Β. Εκείνη τη χρονική στιγμή κλείνει ο διακόπτης δ και ταυτόχρονα κόβεται το νήμα. Να βρείτε:

α. το ρεύμα στο κύκλωμα όταν η ταχύτητα έχει γίνει η μισή της αρχικής

β. το ποσό θερμότητας που εκλύθηκε στην αντίσταση R_2 από τη στιγμή που έκλεισε ο διακόπτης μέχρι να σταματήσει η ράβδος.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

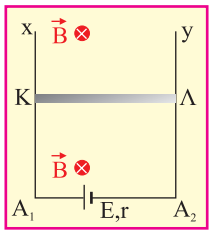
.....

.....

.....

.....

4. Στην διάταξη του σχήματος ο αγωγός ΚΛ έχει μάζα $m = 0,2kg$ αντίσταση $R = 2\Omega$ και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές στους κατακόρυφους μεταλλικούς αγωγούς A_1x και A_2y. Η όλη διάταξη βρίσκεται σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$. Η πηγή έχει ΗΕΔ $E = 12V$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$. Αρχικά ο αγωγός ΚΛ είναι ακίνητος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε το διακόπτη και αφήνουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο. Μετά από λίγο αποκτά οριακή (σταθερή) ταχύτητα. Να βρείτε:



α. προς τα πού θα κινηθεί ο αγωγός ΚΛ

β. την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο αγωγός ΚΛ

γ. τον ρυθμό ενέργειας που μεταφέρει η πηγή σε όλο το κύκλωμα όταν ο αγωγός ΚΛ κινείται με την οριακή του ταχύτητα.

Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$, $ΚΛ = 1\,m$.

.....

.....

.....

.....

.....

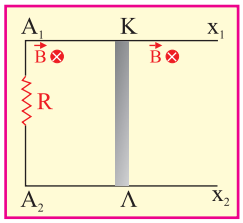
.....

.....

.....

.....

5. Στην παρακάτω διάταξη η ράβδος ΚΛ που είναι αγώγιμη μπορεί να κινείται χωρίς τριβές προς τα δεξιά πάνω στους δύο παράλληλους αγωγούς οι οποίοι στο ένα άκρο τους συνδέονται με αντίσταση $R = 1\Omega$. Η ράβδος έχει μήκος $\ell = 0{,}5\,m$ και αντίσταση $R_1 = 2\Omega$ και όλη η διάταξη βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 2\,T$, όπως στο σχήμα. Να βρείτε:



α. πόση εξωτερική δύναμη F πρέπει να ασκείται στο αγωγό ΚΛ ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ = 6\,m/s$

β. την ισχύ στον αντιστάτη R

γ. τον ρυθμό που καταναλώνεται ενέργεια στον αντιστάτη ΚΛ

δ. την ισχύ της εξωτερικής δύναμης F.

.....

.....

.....

.....

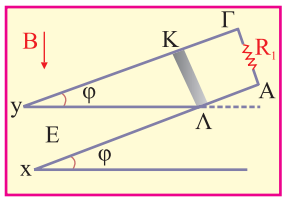
.....

.....

.....

.....

6. Στο παρακάτω κύκλωμα δίνονται $R_1 = 3\Omega$ και $B = 5T$. Ο αγωγός ΚΛ έχει μήκος $\ell = 1m$ μάζα $m = 0,1kg$, αντίσταση $R_2 = 1\Omega$ και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές στους παράλληλους αγωγούς Αx, Γy. Τα άκρα του αγωγού ΚΛ εφάπτονται συνεχώς στους αγωγούς Αx, Γy.



α. Αν ο αγωγός αφήνεται να ολισθήσει να βρείτε την οριακή του ταχύτητα.

β. Την ισχύ στην αντίσταση R_1 όταν σταθεροποιηθεί η ταχύτητά του.

γ. Την στιγμή που ο αγωγός έχει ταχύτητα $\upsilon = \frac{\upsilon_{o\rho}}{2}$ πόση είναι η δύναμη Laplace πάνω του και πόση η τάση στα άκρα του;

Δίνονται: $g = 10m/s^2$, $ημφ = 0,6$ και $συνφ = 0,8$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Ένα κυκλικό πλαίσιο $1000/\pi^2$ σπειρών, ακτίνας 10cm και αντίστασης $R = 10\Omega$, περιστρέφεται με συχνότητα 50Hz μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 0,1T. Ο άξονας περιστροφής διέρχεται από την διάμετρο του πλαισίου και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Το πλαίσιο, με τη βοήθεια ενός διακόπτη, μπορεί να συνδεθεί με αντιστάτη, αντίστασης $R_1 = 90\Omega$.

Α. Γράψτε την εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης που παράγεται από το πλαίσιο.

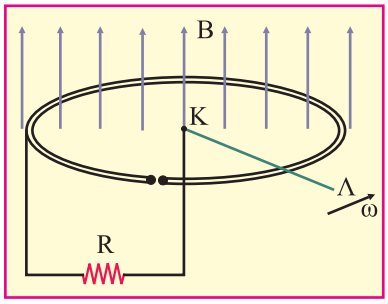
Β. Κλείνουμε τον διακόπτη και συνδέουμε τον αντιστάτη.

α. Ποιο είναι το ποσό της θερμότητας που παράγεται στην εξωτερική αντίσταση R_1 σε χρόνο $\Delta t = 50s$;

β. Πόση είναι η μέση ισχύς που καταναλώνεται στον αντιστάτη;
γ. Πόση είναι η συνολική μέση ισχύς που καταναλώνεται (πλαίσιο – αντιστάτης);

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

8. Ο ομογενής ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ του σχήματος έχει μήκος $L = 1m$ αντίσταση $R' = 8\Omega$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 rad/s$ γύρω από άξονα που περνάει από το άκρο Κ. Ο αγωγός παραμένει συνεχώς οριζόντιος και σε επαφή με κυκλικό στεφάνι ακτίνας $r = 500cm$ όπως στο σχήμα. Στο χώρο υπάρχει κατακόρυφο ομογενές ΜΠ έντασης $B = 4 \cdot 10^{-2} T$. Το τμήμα του αγωγού που βρίσκεται μεταξύ του άκρου Κ και του στεφανιού, κλείνει κύκλωμα μέσω αντίστασης $R = 6\Omega$. Αν το στεφάνι έχει αμελητέα αντίσταση, υπολογίστε:



α. την επαγωγική τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ
β. την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την R
γ. την ενέργεια που πρέπει να προσφέρεται στον αγωγό σε χρόνο $\Delta t = \frac{T}{4}$ (Τ η περίοδος) ώστε να παραμένει σταθερή η γωνιακή του ταχύτητα.

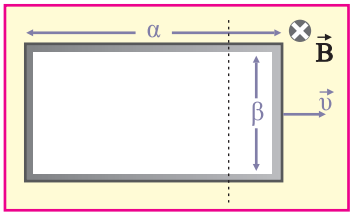
.....
.....
.....
.....
.....

.....

.....

.....

9. Ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο διατομής $2mm^2$ (διατομή σύρματος) εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 6m/s$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 0,25T$. Να υπολογιστεί:



α. η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο κατά τη διάρκεια της εισόδου του στο πεδίο

β. η ισχύς του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Δίνονται: $\alpha = 6,5cm$, $\beta = 6cm$, $\rho_{συρ/τος} = 1,62 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$

.....

.....

.....

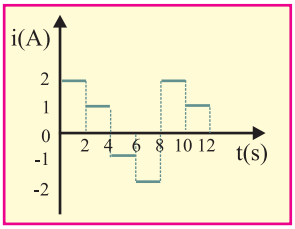
.....

.....

.....

.....

10. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει έναν αντιστάτη αντίστασης $R = 100\Omega$ και μεταβάλλεται περιοδικά σε συνάρτηση με τον χρόνο, φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Με την βοήθειά του, να υπολογίσετε:



α. πόσο φορτίο θα μετατοπιστεί στο κύκλωμα σε χρόνο $t = 8s$

β. πόσο φορτίο περνάει από μια διατομή του αγωγού στο χρονικό διάστημα από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 6s$

γ. πόση θερμότητα αναπτύσσεται στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου

δ. ποια είναι η ενεργός τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. **Σε ηλεκτρική λάμπα ωμικής αντίστασης R, εφαρμόζεται τάση $\upsilon = 200\sqrt{2}\,\eta\mu 100\pi t$ και η μέση ισχύς που καταναλώνει η λάμπα είναι $P = 800W$.**

α. Ποια είναι η τιμή της αντίστασης R;

β. Πόση είναι η ενεργός ένταση του ρεύματος;

γ. Να γράψετε την εξίσωση του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει τη λάμπα και να την παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με τον χρόνο.

δ. Ποιος είναι ο ρυθμός μετατροπής της ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα πάνω στον λαμπτήρα, την χρονική στιγμή $t = 2 \cdot 10^{-2} s$;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

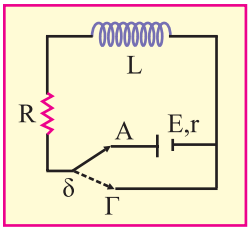
12. **Ιδανικό πηνίο με συντελεστή αντεπαγωγής $L = 2mH$ τροφοδοτείται μέσω αντίστασης $R = 8\Omega$ από πηγή με άγνωστη Η.Ε.Δ. Ε και εσωτερική αντίσταση r. Η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι 4mJ. Την ίδια στιγμή ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα στην πηγή είναι 8J/s.**

α. Ποια η σταθερή ένταση που διαρρέει το κύκλωμα;

β. Ποια τα στοιχεία της άγνωστης Η.Ε.Δ. (Ε,r);
γ. Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος τη χρονική στιγμή που η ενέργεια του πηνίου είναι 1mJ;
δ. Με τι ρυθμό αποταμιεύεται τότε ενέργεια στο Μ.Π. του πηνίου;

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

13. Το ιδανικό πηνίο του σχήματος έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 50mH$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο διακόπτης δ φέρεται στη θέση Α. Η πηγή έχει στοιχεία $E = 20V$, $r = 2\Omega$ ενώ η αντίσταση $R = 8\Omega$.



α. Ποια η φορά και η τιμή του σταθερού ρεύματος που τελικά διαρρέει το κύκλωμα;
β. Φέρουμε το διακόπτη δ στο Β. Ποιά η ένταση και η φορά του ρεύματος αμέσως μετά;
γ. Ποιά η Η.Ε.Δ. αυτεπαγωγής τότε στα άκρα του πηνίου;
δ. Πόση θερμότητα αναπτύσσεται στην αντίσταση απ'τη στιγμή που ο διακόπτης φέρεται στο Γ μέχρι η ένταση του ρεύματος να γίνει το 50% της τιμής που είχε όταν ήρθε στο Γ;

.....
.....
.....
.....
.....

.....

.....

.....

.....

14. Κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα, που περιέχει ιδανικό αέριο, κλείνεται στο πάνω μέρος του με αβαρές θερμομονωτικό και αεροστεγές έμβολο εμβαδού $S = 4cm^2$. Στο κάτω μέρος του δοχείου είναι προσαρμοσμένος οριζόντια, αντιστάτης με αντίσταση $R = 10\Omega$. Στα άκρα A_1 και A_2 του αντιστάτη, συνδέονται δύο κατακόρυφοι μεταλλικοί αγωγοί A_1x και A_2y που τρυπούν τον ηλεκτρικά μονωμένο πυθμένα του δοχείου και βγαίνουν έξω από το δοχείο. Οριζόντιος αγωγός ΚΛ, αμελητέας αντίστασης, μήκους $\ell = 1m$ και μάζας $m = 100g$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές με τα άκρα του πάνω στους αγωγούς A_1x και A_2y. Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 1T$ που είναι κάθετο στο επίπεδο των δύο αγωγών. Την $t = 0s$ αφήνουμε τον αγωγό ΚΛ να κινηθεί ελεύθερα προς τα κάτω. Ο αγωγός μετά από $h = 9m$ αποκτά οριακή ταχύτητα με την οποία συνεχίζει την πτώση του. Να βρείτε:

α. την οριακή ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός ΚΛ

β. την μετατόπιση προς τα πάνω του εμβόλου μέχρι ο αγωγός να αποκτήσει οριακή ταχύτητα

γ. τον χρόνο που πρέπει ο αγωγός ΚΛ να κινείται με οριακή ταχύτητα ώστε το έμβολο να μετατοπιστεί άλλο τόσο προς τα πάνω.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $P_0 = 10^5 atm$, ο αδιαβατικός συντελεστής του αερίου $\gamma = \frac{5}{3}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

.....

.....

.....

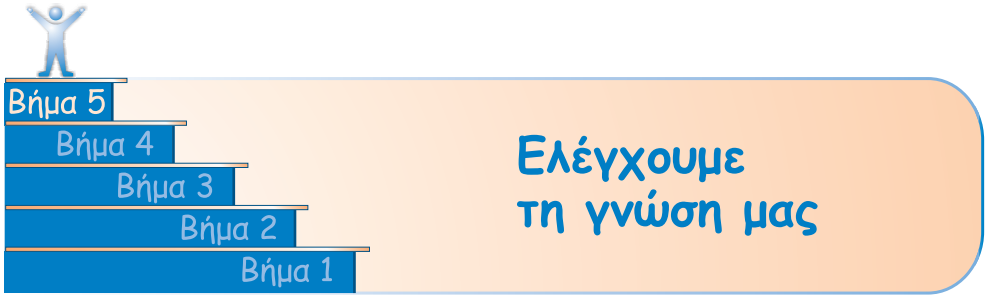
.....

.....

.....

.....

.....

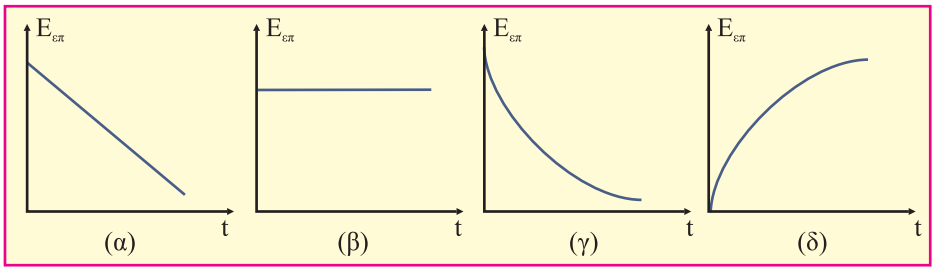


Θέμα 1ο

1. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή που αναπτύσσεται σε ευθύγραμμο αγωγό, όταν η ταχύτητά του είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου και τον αγωγό, εξαρτάται:
α. από τη μάζα του αγωγού,
β. από τη μάζα και την ταχύτητα του αγωγού,
γ. από την ταχύτητα, το μήκος του και την ένταση του μαγνητικού πεδίου.
δ. τίποτα από τα παραπάνω.

2. Όταν φορτισμένο σωματίδιο κινείται κάθετα στις γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, τι από τα παρακάτω ισχύει:
α. Η κινητική του ενέργεια και η ορμή του είναι σταθερές,
β. Μεταβάλλεται μόνο η κινητική του ενέργεια,
γ. Μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια αλλά όχι η ορμή του,
δ. Μεταβάλλεται η ορμή του αλλά η κινητική του ενέργεια παραμένει σταθερή.

3. Ευθύγραμμος αγωγός μήκους L, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνάει από το ένα άκρο του αγωγού. Το επίπεδο περιστροφής του είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου B. Ποιό από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον αγωγό.



4. Να συμπληρώσετε τα κενά.
Αυτεπαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο δημιουργείται .... σε ένα κύκλωμα, όταν μεταβάλλεται .... που το διαρρέει. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται ονομάζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από ..... .

5. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές.

α. Σε ένα αγωγό που κινείται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου δεν αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη. ( )

β. Ο κανόνας του Lenz αποτελεί συνέπεια της αρχής διατήρησης του φορτίου. ( )

γ. Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής δύο πηνίων δεν εξαρτάται από τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. ( )

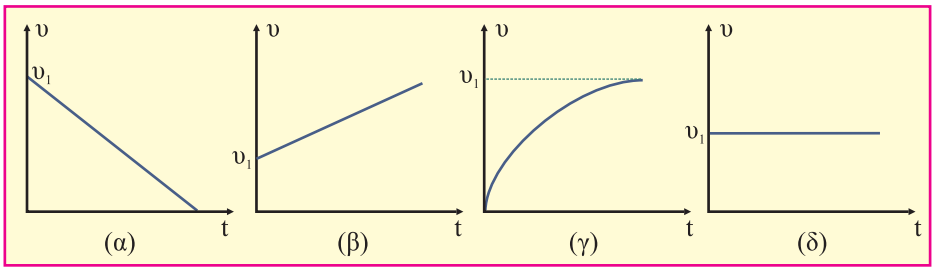
δ. Το συνολικό φορτίο που διέρχεται από μια τομή του σύρματος, κατά τη διάρκεια του φαινομένου της επαγωγής, είναι ανεξάρτητο από τη χρονική διάρκεια του φαινομένου. ( )

(Μονάδες 25)

Θέμα 2ο

Α. Έστω αγωγός ΑΓ που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$. Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται χωρίς τριβές, να δείξετε ότι ισχύει η αρχή της διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.

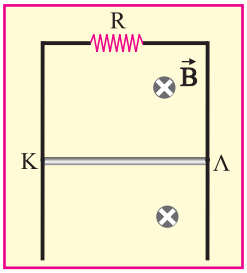
Β.α. Ένας μικρός μεταλλικός δακτύλιος ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντια επιφάνεια κάθετα στις δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου έντασης Β. Η ταχύτητα του δακτυλίου είναι υ_1. Ποιό από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει τη μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο;



β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 25)

Θέμα 3ο



Ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ μήκους $\ell = 100cm$ και μάζας $m = 100g$ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές σε δύο κατακόρυφους μεταλλικούς στύλους αμελητέας αντίστασης, που ενώνονται στο πάνω μέρος με σύρμα αντίστασης $R = 1\Omega$. Η όλη διάταξη βρίσκεται σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο (βλέπε σχήμα) έντασης $B = 1T$, κάθετο στο επίπεδο κίνησης του αγωγού. Αφήνουμε τον αγωγό να κινηθεί και παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του σταθεροποιείται μετά από πτώση κατά $h = 2m$. Η αντίσταση του αγωγού είναι $R_{K\Lambda} = 1\Omega$.

α. Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό.

β. Να υπολογιστεί η σταθερή ταχύτητα που αποκτάει ο αγωγός.

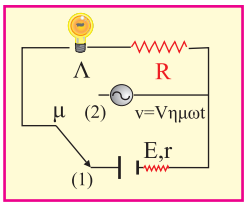
γ. Κατά την πτώση του αγωγού ποιες μετατροπές ενέργειας συμβαίνουν;

δ. Ποιες μετατροπές ενέργειας εκφράζουν τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στον αγωγό;

ε. Πόση είναι η θερμότητα που εκλύεται από τη στιγμή που αφήνεται ο αγωγός μέχρι να αποκτήσει τη σταθερή του ταχύτητα; Δίνεται: $g = 10 m/s^2$

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο



Ένας λαμπτήρας Λ, ένας αντιστάτης R και δύο πηγές, μια συνεχούς και μια αρμονικά εναλλασσόμενης τάσης, συνδέονται μέσω μεταγωγού μ, όπως στο σχήμα. Πάνω στον λαμπτήρα αναγράφονται οι τιμές 220V/110W. Η πηγή της συνεχούς τάσης έχει Η.Ε.Δ Ε=250V και εσωτερική αντίσταση $r = 10\Omega$. Η πηγή της εναλλασσόμενης τάσης έχει συχνότητα 60Hz.

α. Αρχικά ο μεταγωγός είναι στην θέση (1), οπότε ο λαμπτήρας διαρρέεται από συνεχές ρεύμα και αποδίδει ισχύ 110W. Να υπολογίσετε την τιμή της αντίστασης R.

β. Μετακινούμε τον μεταγωγό στην θέση (2) αποσυνδέοντας την πηγή συνεχούς και συνδέοντας αυτήν της εναλλασσόμενης τάσης. Ποιο πρέπει να είναι το πλάτος της για να συνεχίσει ο λαμπτήρας να λειτουργεί κανονικά;

γ. Ποια είναι η στιγμιαία ισχύς στον λαμπτήρα, τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = \frac{T}{3}$; (Τ είναι η περίοδος της εναλλασσόμενης τάσης).

δ. Ποια χρονική στιγμή η στιγμιαία ισχύς γίνεται για πρώτη φορά ίση με το μισό της μέσης;

(Μονάδες 25)